ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Стасюк Ігор Зиновійович

УДК 517.9

ПРОДОВЖЕННЯ МЕТРИЧНИХ СТРУКТУР

01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник
Зарічний Михайло Михайлович
доктор фізико-математичних наук, професор

ЛЬВІВ – 2006

ЗМІСТ

ПОЗНАЧЕННЯ

- A^c — доповнення до підмножини A фіксованого топологічного простору;
- $\mathrm{cc}(X)$ — множина всіх непорожніх опуклих компактних підмножин локально опуклого топологічного простору X;
- $\mathcal{CH}(X)$ — множина всіх ланцюгів компактних підмножин топологічного простору X;
- $\mathrm{CL}(X)$ — множина всіх непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X;
- $\mathrm{CL_c}(X)$ — множина всіх непорожніх опуклих замкнених підмножин локально опуклого топологічного простору X;
- $\dim_A(X)$ — вимір Асуада метричного простору X;
- Δ_X — діагональ топологічного простору $X \times X$;
- $\mathrm{diam}_d(A)$ — діаметр підмножини A фіксованого метричного простору (X, d);
- $\mathrm{dom}(\rho)$ — множина, на якій визначена (псевдо)метрика ρ;
- ∂A — межа підмножини A фіксованого топологічного простору;
- $\exp X$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин топологічного простору X;
- $\exp_f X$ — множина всіх непорожніх скінченних підмножин топологічного простору X;
- $L^1(T, H)$ — банаховий простір функцій, інтегровних за Бохнером, що діють з простору з мірою T у банаховий простір H;

- $\mathrm{Li}\, A_\lambda$ — множина всіх граничних точок напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ підмножин фіксованого топологічного простору;
- $\mathrm{Ls}\, A_\lambda$ — множина всіх точок згущення напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ підмножин фіксованого топологічного простору;
- $\mathcal{M}_a(A)$ — множина метрик, що породжують вихідну топологію метризовного топологічного простору A;
- $\mathcal{M}_{\mathrm{c}}(A)$ — множина неперервних метрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{M}_d(A)$ — множина метрик, що домінують метрики з $\mathcal{M}_a(A)$;
- $\mathcal{M}_{\mathrm{lip}}(A)$ — множина ліпшицевих метрик, заданих на фіксованому метричному просторі A;
- $\mathcal{PM}(A)$ — множина всіх псевдометрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ — множина неперервних псевдометрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{PM}_b(A)$ — множина обмежених псевдометрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ — множина ліпшицевих псевдометрик, заданих на фіксованому метричному просторі A;
- $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ — множина неперервних псевдометрик, заданих на топологічному просторі A і обмежених числом $T \geq 0$;
- $\mathcal{PM}_{uec}(A)$ — множина псевдометрик, одностайно рівномірно неперервних на компактних підмножинах топологічного простору A.

- $s(B, x)$ — метрична проекція точки x на опуклу підмножину B у фіксованому компактному локально опуклому метричному просторі;
- $\mathcal{S}$ — множина всіх сімей узгоджених неперервних ультраметрик, визначених на ланцюгах замкнених підмножин фіксованого нульвимірного метризовного топологічного простору;
- X^Y множина всіх відображень з множини Y в множину X;
- $\mathcal{Q}(X)$ — множина всіх непорожніх підмножин множини X;
- $\mathcal{T}_F$ — топологія Фелла на множині непорожніх замкнених підмножин фіксованого топологічного простору;
- $\mathcal{T}_{co}$ — компактно-відкрита топологія на множині дійсних функцій, визначених на фіксованому топологічному просторі;
- $\mathcal{UDM}(A)$ — множина неперервних рівномірно незв'язних метрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ — множина неперервних ультраметрик, заданих на топологічному просторі A;
- $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ — множина неперервних ультраметрик, заданих на топологічному просторі A і обмежених числом $T > 0$;
- $\mathcal{USCPM}_{cc}(A)$ — множина напівнеперервних зверху псевдометрик, визначених на опуклому замкненому підпросторі A заданого локально опуклого простору;
- $\mathcal{USCM}_{cc}(A)$ — множина напівнеперервних зверху метрик, визначених на опуклому замкненому підпросторі A заданого локально опуклого простору;

- V^- — множина всіх непорожніх замкнених підмножин фіксованого топологічного простору, які перетинають підмножину V цього простору;
- V^+ — множина всіх непорожніх замкнених підмножин фіксованого топологічного простору, які містяться у підмножині V цього простору;
- $[X, U, a, b]^-$ — множина всіх неперервних псевдометрик, визначених на топологічному просторі X, графіки яких перетинають відкриту підмножину $U \times (a, b)$ простору $X \times X \times \mathbb{R}$;
- $[X, K, a, b]^+$ — множина всіх неперервних псевдометрик, визначених на топологічному просторі X, графіки яких не перетинають компактну підмножину $K \times [a, b]$ простору $X \times X \times \mathbb{R}$;
- $\rho_1 \wedge \rho_2$ — (ультра)метрика, яка є поточковим максимумом двох (ультра)метрик ρ_1 та ρ_2, визначених на фіксованій множині;

ВСТУП

Актуальність теми

Задача продовження відображень є одною з фундаментальних математичних задач; теореми про продовження займають важливе місце в топології і функціональному аналізі. Зокрема, до таких теорем належать теореми Тітце–Урисона про продовження неперервних функцій, заданих на замкненій підмножині нормального топологічного простору, та теорема Гана–Банаха про продовження лінійних функціоналів. На даний момент існує розгалужена теорія продовження неперервних функцій; деякі її результати викладені у монографії [47]. Паралельно, хоча, можливо, не до такого рівня, як теорія продовження функцій, розвивається теорія продовження метрик. Початок дослідженням у цьому напрямку заклала класична робота Ф. Гаусдорфа 1930 року (див. [30]), в якій доведено, що кожна метрика, яка породжує топологію замкненого підпростору метризовного топологічного простору, може бути продовжена до неперервної метрики на всьому просторі. Результат Ф. Гаусдорфа, який фактично є узагальненням теореми Тітце про продовження неперервних функцій, неодноразово перевідкривався та отримував нові доведення у роботах Бінга, Бекона, Торуньчика (див. [13], [7], [61]) та ін. Розглядалися також задачі продовження метрик зі спеціальними властивостями (квазіметрики, ліпшицеві метрики та ін.)

Новий етап досліджень заклала проблема існування лінійних операторів продовження конуса псевдометрик, визначених на замкненій підмножині метризовного топологічного простору, сформульована та частково розв'язана Ч. Бессагою у 80-х роках минулого століття. Раніше результати про існування сублінійних операторів продовження псевдометрик одержували Нгуен Ван Ку та

Нгуен То Ню ([46]). Повний розв'язок згаданої задачі одержаний Т. О. Банахом. Подальше узагальнення відомих результатів пов'язане з проблемою знаходження операторів продовження (псевдо)метрик із змінною областю визначення. Оператори одночасного продовження неперервних псевдометрик (ультраметрик), визначених на замкнених підмножинах компактного метризовного (нульвимірного) топологічного простору, розглядалися Е. Д. Тимчатином та М. М. Зарічним у [62], [63]. Отримані оператори неперервні у рівномірній топології та володіють рядом додаткових властивостей (зокрема, лінійність для випадку псевдометрик та збереження максимуму двох ультраметрик зі спільною областю визначення для випадку ультраметрик). Природньо виникає проблема існування та побудови аналогів операторів одночасного продовження метричних структур, неперервних в різних топологіях на множинах часткових (псевдо)метрик (наприклад, топологія Фелла при ототожненні псевдометрик з їхніми графіками, гіпографіками, топологія поточкової збіжності, ліпшицева топологія). При цьому можна вимагати збереження спеціальних властивостей (псевдо)метрик, таких, як неперервність, ліпшицевість, напівнеперервність, накладати умови на область визначення псевдометрик (опуклі множини і тіла, замкнені, компактні множини, ланцюги компактних підмножин вихідного простору та ін.). Актуальною виявилася задача знаходження однорідних операторів одночасного продовження часткових ультраметрик та рівномірно незв'язних метрик, визначених на замкнених підмножинах компактних нульвимірних метризовних топологічних просторів із збереженням всіх властивостей конструкції М. М. Зарічн Е. Д. Тимчатина. Природньо постає також питання існування неперервних операторів продовження ультраметрик у некомпактному випадку та сімей узгоджених ультраметрик. У напрямку описаної проблематики виконана дана дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Тематика дисертації пов'язана з науково-дослідними роботами " Тополого-алгебраїчні структури та їх застосування " (номер державної реєстрації МТ-224Ф). Робота виконана на кафедрі геометрії і топології механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка.

Мета і завдання дослідження

Мета дисертаційної роботи — побудувати та встановити властивості операторів продовження метричних структур, заданих на ряді топологічних просторів, розглянути при цьому різноманітні способи топологізації множин часткових (псевдо)метрик.

Об'єктом дослідження є метричні структури, визначені на підпросторах топологічних просторів, та оператори продовження, що зберігають ці структури.

Предметом дослідження є властивості та умови існування операторів продовження метричних структур для ряду топологічних просторів.

Зокрема, завданнями дослідження є

— опис властивостей операторів продовження псевдометрик та метрик, визначених на опуклих компактних підмножинах локально опуклого топологічного простору, опуклих тілах в евклідовому просторі;

— введення та встановлення властивостей конструкцій одночасного продовження часткових ультраметрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного топологічного простору, а також продовження ультраметрик з фіксованою областю визначення у некомпактному випадку;

— опис операторів продовження часткових псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах локально компактного нульвимірного топологічного простору;

— продовження (псевдо)метрик зі спеціальними властивостями, а саме рівномірно незв'язних метрик, ліпшицевих метрик, грубо рівномірних метрик;

Наукова новизна одержаних результатів

У дисертації отримано наступні нові результати:

— одержано опис властивостей операторів продовження неперервних, напівнеперервних та ліпшицевих (псевдо)метрик, заданих на опуклих компактних підмножинах локально опуклого компактного топологічного простору. При цьому множини (псевдо)метрик наділені топологіями Фелла, В'єторіса, ліпшицевою топологією, топологіями поточкової та рівномірної збіжності;

— побудовано однорідні оператори одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного топологічного простору. Цей результат є посиленням відповідного результату Е. Д. Тимчатина та М. М. Зарічного і дає позитивну відповідь на питання про існування однорідних операторів продовження ультраметрик, які володіють всіма властивостями конструкції Е. Д. Тимчатина та М. М. Зарічного;

— отримано оператор продовження неперервних ультраметрик, заданих на фіксованій підмножині нульвимірного сепарабельного некомпактного топологічного простору. Цей результат є аналогом результату Т. О. Банаха та Ч. Бессаги для випадку неперервних ультраметрик;

— побудовано методи продовження рівномірно незв'язних метрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірних компактних топологічних просторів;

— описано оператор продовження сімей узгоджених ультраметрик, визначених на ланцюгах замкнених підмножин нульвимірного топологічного простору.

— побудовано оператор продовження грубо рівномірних метрик, визначених на замкненому підпросторі власного метричного простору. Цей результат є узагальненням результату М. М. Зарічного про продовження асимптотично ліпшицевих метрик.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані у теорії операторів, загальній топології, метричній геометрії.

Особистий внесок здобувача

Результати, викладені у дисертації, отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися на

1) міжнародній конференції "Комплексний аналіз та його застосування (Львів, 26–29 травня 2003 р.)";

2) Першій літній школі з топологічної алгебри і функціонального аналізу (Козева, 22–31 липня 2003 р.);

3) конференціях молодих вчених із сучасних проблем математики та механіки імені академіка Я. С. Підстригача (Львів, 24–26 травня 2004 р. та 24–27 травня 2005 р.);

4) міжнародній конференції "Геометрична топологія, нескінченновимірна топологія, абсолютні екстендери, застосування " (Львів,

26–30 травня 2004 р.);

5) міжнародній конференції “Аналіз і суміжні питання” (Львів, листопад 2005 р.);

6) семінарі “Топологія та її застосування” кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка (травень 2003 р., лютий 2004 р., грудень 2005 р.);

7) засіданні наукового семінару з геометричної топології Люблянського інституту математики, фізики і механіки (Словенія, червень 2006 р.),

8) Четвертій літній школі з алгебри, топології, функціонального і стохастичного аналізу (Козева, 17–29 липня 2006 р.)

Публікації

Результати дисертації опубліковані в 6 наукових статтях у виданнях, включених у перелік ВАК України, в яких слід опублікувати результати дисертації, та 4 тезах доповідей наукових конференцій.

Структура та об'єм дисертації

Дисертація складається з переліку позначень, вступу, 5 розділів, висновків та списку використаних джерел. Обсяг дисертації — 136 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Продовження фіксованої метрики

Теорія продовження метрик бере свій початок з 30-х років минулого століття. У класичній роботі Ф. Гаусдорфа 1930 року (див. [30]) доведено, що кожну метрику, задану на замкненій підмножині A метризовного топологічного простору X, що породжує топологію підпростору на A, можна продовжити до метрики, що породжує вихідну топологію на X. Еквівалентним даному твердженню є факт, що кожну неперервну псевдометрику на підмножині A можна продовжити до неперервної псевдометрики на X. З того часу результат Гаусдорфа неодноразово перевідкривався і отримував нові доведення. Зокрема, незалежне доведення попередньої теореми запропоноване Бінгом (див. [13]). Наступний результат був отриманий Беконом [7]: якщо X — топологічно повний метризовний простір (тобто існує повна метрика, що породжує топологію на X), A — замкнена підмножина простору X і d — повна метрика на A, то існує повна метрика на X, яка є продовженням метрики d. Теорема про продовження повної метрики була також доведена Торуньчиком (див. [61]). У доведенні використано теорему Клі про продовження гомеоморфізму ([32]).

У статті [45] розглянуто питання продовження метрики, заданої на підмножині метричного простору (X, d), до метрики на X, яка рівномірно еквівалентна метриці d. Основним результатом є наступна теорема: якщо A — підмножина простору (X, d) і ρ — метрика на A, рівномірно еквівалентна звуженню $d|_{A\times A}$, то продовження ρ'

метрики ρ, рівномірно еквівалентне метриці d, можна побудувати тоді і лише тоді, коли існує рівномірно неперервна псевдометрика σ на (X, d) така, що $\sigma|_{A\times A} = \rho$.

У роботі [37] розглянуті різноманітні розширення теореми Гаусдорфа. Одним з результатів, отриманих Лууккайненом, є наступна теорема: якщо ρ — метрика на підмножині A метричного простору (X, d), ліпшицева відносно d, то існує ліпшицева метрика ρ' на X, яка є продовженням метрики ρ. Лууккайнен також розглядав задачу продовження метрик, локально рівномірно еквівалентних заданій метриці на множині X (метрики ρ і d на множині X є локально рівномірно еквівалентними, якщо тотожнє відображення $\mathrm{id}\colon (X, \rho) \to (X, d)$ є локально рівномірним гомеоморфізмом). Доведено, що якщо ρ — метрика, задана на замкненій підмножині A простору (X, d), і ρ — локально рівномірно еквівалентна метриці d, то існує продовження ρ' метрики ρ на X, причому ρ' — локально рівномірно еквівалентна метриці d. У випадку, коли множина A незамкнена, можна знайти продовження ρ' метрики ρ на деякий окіл множини A в X. Це продовження можна вибрати локально рівномірно еквівалентним метриці d.

Поняття C–вкладеності (C^*–вкладеності) підпростору A в топологічний простір X визначається умовою існування продовження довільної неперервної (неперервної обмеженої) дійсної функції, визначеної на підпросторі A, на весь простір X. Властивість існування неперервного продовження (псевдо)метрик лягла в основу означення P–вкладеного підпростору та його модифікацій. Підмножина A топологічного простору X є P–вкладеною, якщо довільна неперервна псевдометрика на A продовжується до неперервної псевдометрики на X. Аренс (див. [4]) ввів поняття P^γ–вкладення, узагальнюючи теорему Тітце про продовження неперервних функцій.

Якщо γ — нескінченний кардинал, то підмножина A топологічного простору X називається P^{γ}–вкладеною в X, якщо кожна неперервна γ–сепарабельна псевдометрика d на X (тобто псевдометрика, що породжує топологію на X, в якій існує всюди щільна множина $C \subset X$ потужності $\leq \gamma$) продовжується до γ–сепарабельної псевдометрики на X. Основним результатом роботи Аренса є еквівалентність наступних тверджень для фіксованих топологічного простору X та його замкненої підмножини A: а) кожне локально-скінченне відкрите покриття простору A можна продовжити на весь простір X; б) кожну псевдометрику на A можна продовжити до псевдометрики на X; в) довільне відображення з простору A у замкнену опуклу підмножину C банахового простору B можна продовжити на X. Дані твердження залишаються еквівалентними, якщо розглядати відповідно зліченні покриття, $\aleph_0$ – сепарабельні псевдометрики і вимагати сепарабельність множини C (умови а)', б'), в')). У цьому випадку можна розширити умову в') для деякого класу незамкнених підмножин банахового простору B. Крім цього доведено, що умови а') – в') виконуються для нормального простору X. Умови ж а) – в) мають місце для заданого простору X та довільних його підмножин A тоді і лише тоді, коли простір X колективно нормальний (див. [19])

У статті Шапіро (див. [51]) узагальнено результати Аренса і продовжено вивчення P–вкладень. Одним з результатів є характеризація P–вкладеності, а саме: топологічний простір X є колективно нормальним тоді і лише тоді, коли кожна замкнена підмножина простору X є P–вкладеною в X. Наведений також ряд інших необхідних та достатніх умов, за яких множина є P^{γ}–вкладеною. Розглянуто зв'язок між поняттями P–вкладеності та C–вкладеності, C^{*}–вкладеності, псевдокомпактності. Зокрема, доведено, що з

P–вкладеності випливає C–вкладеність, але не навпаки. Узагальненням теореми Аренса є наступне твердження: якщо множина є C–вкладеною, то вона є $P^{\aleph_0}$–вкладеною. Шапіро також довів, що для цілком регулярного псевдокомпактного простору поняття C–вкладеності та P–вкладеності еквівалентні.

Поняття T–вкладення введене Ело та Шапіро [2]. Множина A є T–вкладеною у простір X тоді і лише тоді, коли кожна цілком обмежена неперервна псевдометрика на A має продовження, яке є цілком обмеженою неперервною псевдометрикою на X. T–вкладення охарактеризовані в термінах різних типів відкритих покриттів простору X. Крім цього, доведено, що для того, щоб підпростір A був T–вкладеним в X достатньо, щоб кожну цілком обмежену неперервну псевдометрику на A можна було продовжити до неперервної псевдометрики на X. У термінах T–вкладеності отримано нові необхідні та достатні умови для того, щоб топологічний простір X був нормальним, а також доведено, що підпростір $A \subset X$ є T–вкладеним тоді і лише тоді, коли він C^*–вкладений в X.

Підпростір A називається z–вкладеним в топологічний простір X, якщо для довільної функціонально замкненої підмножини Z простору A існує функціонально замкнена підмножина Z' простору X така, що $Z' \cap A = Z$. Характеризація та дослідження властивостей z–вкладень були проведені Ело, Імлером та Шапіро у [3]. Наведена необхідна умова z–вкладеності підмножин простору X: для z–вкладених підмножин кожна сепарабельна неперервна псевдометрика, задана на підмножині, продовжується до неперервної псевдометрики, заданої на деякому зліченному перетині функціонально відкритих множин, що містять дану підмножину.

Робота [1] є оглядом відомих результатів, що стосуються P–вкладень, а також містить нові характеризації P–вкладень.

Зв'язок між властивістю існування продовження неперервних функцій та псевдометрик встановлено у статті Сеннотта [53], де доведено, що підпростір A топологічного простору X є C^*–вкладеним в X тоді і лише тоді, коли кожна повна цілком обмежена псевдометрика на A продовжується до псевдометрики на X.

1.2. Лінійні та функторіальні оператори продовження псевдометрик

Результати, пов'язані з існуванням лінійних операторів продовження та усереднення неперервних функцій на компактах, підсумовано в монографії А. Пелчинського (див. [47]). Ці результати знайшли застосування до класичної задачі лінійної класифікації просторів неперервних функцій на компактах.

На початку 80-х років розглядають задачу одночасного продовження простору псевдометрик, заданих на замкненій підмножині топологічного простору. Теорема Гаусдорфа про продовження метрик, а також теорема Дугунджі ([20]) про існування неперервних лінійних операторів продовження неперервних функцій з підпростору A топологічного простору X зробили актуальним питання існування лінійних операторів продовження (псевдо)метрик. Простір усіх (псевдо)метрик, заданих на множині A, утворює додатній конус: для довільних $c \geq 0$ і (псевдо)метрик ρ, σ на A функції $\rho + \sigma$ та $c\rho$ також є (псевдо)метриками на A. Тому оператор $u\colon \mathcal{PM}(A) \to \mathcal{PM}(X)$ називають лінійним, якщо він є адитивним та однорідним при множенні на невід'ємну сталу, тобто $u(\rho+\sigma) = u(\rho)+u(\sigma)$ і $u(c\rho) = cu(\rho)$ для довільних $\rho, \sigma \in \mathcal{PM}(A)$ і $c \geq 0$. Перші результати, пов'язані з існуванням неперервних (нелінійних) операторів продовження метрик, отримані у [46]. Проблема існування лінійних операторів була частково розв'язана Ч. Бессагою [12]. Зокрема, для деяких пар (X, A) побудовано неперервні лінійні оператори продовження метрик.

Перш, ніж сформулювати основну теорему з [12], введемо деякі означення. Симетричною функцією, заданою на метризовному топологічному просторі X, називається функція $p\colon X \times X \to \mathbb{R}$ така, що $p(x,y)=p(y,x)$ і $p(x,x)=0$ для довільних $x,y\in X$. Позначимо через $S(X)$ лінійний простір симетричних функцій, заданих на X. Нехай ρ_1,ρ_2 — псевдометрики, задані на метризовному топологічному просторі X. Кажуть, що псевдометрика ρ_1 домінує псевдометрику ρ_2, якщо з умови $\rho_1(x_n,x)\to 0$ випливає $\rho_2(x_n,x)\to 0$. Домінантною (рівномірно домінантною) називається метрика d на топологічному просторі X, для якої тотожнє відображення $\mathrm{id}\colon (X,d)\to X$ є неперервним (рівномірно неперервним). Ч. Бессагою доведена наступна теорема. Якщо A — околовий ретракт метризовного топологічного простору X такий, що $|A|\geq 2$, то існує лінійний оператор $u\colon S(A)\to S(X)$, який має наступні властивості: 1) $u(p)$ є продовженням p для кожного $p\in S(A)$; 2) $u(p)\geq 0$ для кожного $p\geq 0$, $p\in S(A)$; 3) оператор u переводить псевдометрики (метрики, неперервні псевдометрики, неперервні метрики, обмежені псевдометрики, метрики, що породжують топологію простору A, домінантні метрики), задані на A, у відповідно псевдометрики (метрики, неперервні псевдометрики, неперервні метрики, обмежені псевдометрики, метрики, що породжують топологію простору X, домінантні метрики), задані на X. Крім цього, оператор u неперервний у топологіях рівномірної та поточкової збіжності функцій. Опишемо конструкцію, запропоновану Ч. Бессагою в [12]. Для побудови оператора продовження використано поняття “стиснутого конуса” над простором (A,a_0) (тут a_0 — фіксована точка простору A). Стиснутим конусом над топологічним простором (A,a_0) називається факторпростір $\mathrm{sc}(A,a_0)=(A\times[0,1])/(A\times\{0\}\cup\{a_0\}\times[0,1])$. Множина $(A\times\{0\}\cup\{a_0\}\times[0,1])$ розглядається як точка z простору $\mathrm{sc}(A,a_0)$. При цьому можна вважати, що множина A — це підмножина $(A\setminus\{a_0\})\times\{1\}\cup\{z\}$ множини $\mathrm{sc}(A,a_0)$. Для довільної симетричної функції p, заданої на множині A, нехай

$$\mathrm{sc}(p)((a,u),(b,v)) = \frac{1}{2}[p(a,b)(u+v-|u-v|)+p(a,a_0)(u-v+|u-v|)+$$
$$+p(b,a_0)(v-u+|u-v|)],\ a,b\in A, u,v\in[0,1].$$

Зауважимо, що оператор, означений таким чином, зберігає метрики. Тоді, якщо простір A є околовим ретрактом простору X, то існує ретракція $r\colon \mathrm{sc}(X) \to \mathrm{sc}(A)$ така, що для довільної неперервної псевдометрики ρ на множині A псевдометрика $u_1(\rho) = \mathrm{sc}(\rho\circ(r\times r))$ неперервна і є продовженням псевдометрики ρ на простір X (див. [12, розділ 2.2]). Для побудови оператора продовження метрик автором використане наступне допоміжне твердження. Якщо r — неперервна ретракція з топологічного простору Z на замкнений підпростір Y простору Z, то існує обмежена неперервна псевдометрика q на Z така, що $q|_{Y\times Y}=0$, і якщо ρ — неперервна (домінантна) метрика, визначена на просторі Y, то $d=\rho\circ(r\times r)+tq$ — неперервна (домінантна) метрика, визначена на просторі Z для довільного $t>0$. Дане твердження використане для $Z=\mathrm{sc}(X)$, $Y=\mathrm{sc}(A)$. Оператор продовження метрик, який володіє всіма згаданими вище властивостями, визначений за формулою

$$u(\rho)(x,y) = u_1(\rho)(x,y)+\rho(x_0,y_0)q(x,y),\ x,y\in X,$$

де x_0, y_0 — довільні елементи множини A такі, що $x_0\neq y_0$.

У [12, §4] лінійні оператори продовження розглянуті як функтори між певними категоріями.

Повністю задача лінійного продовження (псевдо)метрик була розв'язана Т. О. Банахом (див. [8]). Регулярний оператор продовження метрик, заданих на замкненій підмножині A компактного метризовного простору X, побудований О. Піхурком у [48] на основі нескладної модифікації конструкції Т. О. Банаха. Оператор представлений в [48] у вигляді нескінченної суми операторів продовження псевдометрик, які розділяють точки простору X.

Достатньо просте доведення існування лінійного регулярного оператора продовження конуса метрик, що породжують топологію замкненого підпростору A метризовного компакту X, до метрик, що породжують топологію на X, запропоноване М. М. Зарічним у [67]. У доведенні використано ізометричне вкладення простору X у простір вимірних функцій M_X, що діють з відрізка $[0,1]$ в X з топологією збіжності за мірою. Оператор продовження має вигляд $u(\rho)(x,y) = \int_0^1 \rho(h(x)(t),h(y)(t))dt$ для довільних $x,y \in X$ та псевдометрики ρ на A. Тут h — гомеоморфізм між M_X та M_A, побудований за допомогою теореми Клі (див. [32]). У роботі зауважено, що результат існування лінійного оператора продовження можна поширити на випадок довільної пари сепарабельних метричних просторів, розглядаючи при цьому обмежені метрики. Беручи до уваги факт, що простори M_X є абсолютними ретрактами, дану конструкцію можна використовувати і для більш загальних випадків.

Т. О. Банах та О. Піхурко (див. [9]) ввели поняття функторіального оператора продовження псевдометрик. Довільна неперервна функція f з топологічного простору X у топологічний простір Y породжує лінійний оператор $f^*\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(Y) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$, визначений формулою $f^*(\rho) = \rho\circ(f\times f)$ для довільної $\rho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(Y)$. Позначимо через $\mathcal{T}op$ категорію всіх топологічних просторів та неперервних відображень, а через $\mathcal{M}comp$ її підкатегорію, що складається з метризовних компактів. Нехай $F\colon \mathcal{M}comp \to \mathcal{T}op$ — функтор, який містить одиничний функтор Id як підфунктор. Тоді сім'я

$$T = \{T_X\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(FX)\}$$

операторів продовження називається функторіальним оператором продовження псевдометрик для функтора F, якщо для довільного морфізму $f\colon X \to Y$ у категорії $\mathcal{M}comp$ наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(Y) & \xrightarrow{T_Y} & \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(FY) \\ f^* \downarrow & & \downarrow (Ff)^* \\ \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X) & \xrightarrow{T_X} & \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(FX) \end{array}$$

є комутативною. Якщо ж всі оператори T_X є лінійними, то сім'я $T = \{T_X\}$ називається лінійним функторіальним оператором продовження псевдометрик для функтора F. Як зазначено у [9], класичними прикладами функторіальних операторів продовження псевдометрик є гаусдорфове продовження псевдометрик з компакту X на гіперпростір $\exp X$ непорожніх компактних підмножин простору X, а також продовження Канторовича (псевдо)метрик з X на простір PX ймовірнісних мір на X. Проте ці оператори не є лінійними. Важливим прикладом функтора, що допускає лінійний функторіальний оператор продовження псевдометрик, є функтор, що ставить у відповідність компактному простору X множину M_X. Отже, лінійний оператор продовження, побудований у [67], є функторіальним. Перш, ніж сформулювати основний результат з [9], введемо деякі допоміжні поняття. Нехай $H \subset S_n$ — підгрупа групи S_n всіх перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$. Для компактного метризовного простору X нехай $SP^n_H(X)$ — факторпростір простору X^n щодо наступного відношення еквівалентності $\sim$: $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ тоді і лише тоді, коли $(x_1, \ldots, x_n) = (y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)})$ для деякого $\sigma \in H$. Тоді SP^n_H визначає функтор на категорії $\mathcal{M}comp$. Т. О. Банахом та О. Піхурком доведено, що функтор SP^n_H допускає лінійний функторіальний оператор продовження псевдометрик тоді і лише тоді, коли дія підгрупи H на множині $\{1, \ldots, n\}$ має одноелементну орбіту (тобто $H \cdot k = \{\sigma(k) : \sigma \in H\} = \{k\}$ для деякого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Важливим наслідком цього результату є неіснування лінійного функторіального оператора продовження псевдометрик для функторів exp і P на категорії $\mathcal{M}comp$.

Поняття цілком метризовного функтора введене В. Федорчуком у [23]. Ендофунктор F у категорії компактів називається нормальним, якщо він неперервний, мономорфний, епіморфний, зберігає вагу нескінченних компактів, перетини, прообрази, одноелементні множини і порожню множину. Функтор F називається слабко нормальним (майже нормальним), якщо він має всі властивості з попереднього означення крім властивості збереження прообразів (відповідно епіморфності). Функтор F називається напівнормальним, якщо він неперервний, мономорфний і зберігає перетини, одноелементні множини та порожню множину. Нормальний (слабко нормальний, майже нормальний) функтор у категорії компактів називається метризовним, якщо існує відображення, що ставить у відповідність кожній метриці d_X, визначеній на компактному метризовному просторі X метрику d_{FX}, і при цьому виконуються наступні умови: 1) Для кожного ізометричного вкладення $i\colon (X, d) \to (X', d')$ відображення $Fi\colon (FX, d_{FX}) \to (FX', d'_{FX})$ також є ізометричним вкладенням; 2) $\mathrm{diam}(FX, d_{FX}) = \mathrm{diam}(X, d)$; 3) природне вкладення $\eta X\colon (X, d) \to (FX, d_{FX})$ є ізометричним вкладенням. При цьому відображення $d_X \mapsto d_{FX}$ називається метризацією функтора F.

У роботі Т. О. Банаха та Ч. Бессаги (див. [10]) отримано нові результати, що стосуються існування та властивостей лінійних операторів продовження (псевдо)метрик. При побудові операторів продовження авторами використана конструкція Хартмана-Мицельського ([28]). Для довільного $n \in \mathbb{N}$ і топологічного простору X

через $HM_n(X)$ позначають множину всіх функцій $f : [0,1) \to X$, для яких існують числа $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ такі, що функція f є константою на кожному інтервалі $[a_{i-1}, a_i)$, $1 \le i \le n$. Нехай

$$HM(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} HM_n(X).$$

Передбаза топології на $HM(X)$ у точці $f \in HM(X)$ складається з множин $N(a, b, V, \varepsilon)$ таких, що

1) $0 \le a < b \le 1$, f є сталою на $[a, b)$, V — окіл точки $f(a)$ у X, і $\varepsilon > 0$;

2) якщо $g \in N(a, b, V, \varepsilon)$, то $\mu\{t \in [a, b) : g(t) \notin V\} < \varepsilon$, де μ — міра Лебега на $[0, 1]$.

Для довільного підпростору A простору X, простір $HM(A)$ можна розглядати як підпростір простору $HM(X)$. Простір X можна також ототожнити з $HM_1(X) \subset HM(X)$. Для кожної функції $f \in HM(X)$ нехай $\operatorname{supp}(f)$ — найменша підмножина $A \subset X$ така, що $f \in HM(A) \subset HM(X)$. Тоді $\operatorname{supp}(f) = f([0, 1))$.

Розглянемо множину $\mathbb{R}^{X\times X}$, наділену тихонівською топологією добутку. Наступне твердження доведене у [10]: для метризовного простору X формула $hm(d)(f, g) = \int_0^1 d(f(t), g(t))dt$ визначає лінійний додатній неперервний оператор продовження

$$hm : \mathbb{R}^{X\times X} \to \mathbb{R}^{HM(X)\times HM(X)},$$

який зберігає сталі функції, обмежені (неперервні) функції, (псевдо)метрики, домінантні метрики та обмежені метрики, що породжують топологію на X. Крім цього, для довільної цілком обмеженої псевдометрики d на X псевдометрика $hm(d)$ цілком обмежена на кожному $HM_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$. На основі попереднього твердження має місце наступна теорема ([10]). Для довільної замкненої підмножини X метризовного простору Y існує лінійний додатній оператор продовження $T\colon \mathbb{R}^{X\times X} \to \mathbb{R}^{Y\times Y}$, який зберігає сталі (обмежені, неперервні) функції, псевдометрики, метрики, (домінантні метрики та метрики, що породжують топологію на X). Цей оператор є неперервним у топологіях поточкової та рівномірної збіжності функцій, а також у компактно-відкритій топології. Крім цього, оператор T можна побудувати так, щоб виконувалися наступні умови: 1) якщо Y метризовний повною метрикою, а X — компактний, то T зберігає повні метрики, що породжують топологію на X; 2) якщо Y сепарабельний і $\dim Y \setminus X < \infty$, то T зберігає цілком обмежені псевдометрики. Останню теорему можна узагальнити для випадку стратифікованих просторів.

1.3. Оператори продовження (псевдо)метрик із змінною областю визначення

Питання одночасного лінійного продовження неперервних псевдометрик, заданих на замкнених підмножинах компактного метризовного простору X, розглядалося М. М. Зарічним та Е. Д. Тимчатином у [62]. Передумовою для постановки такої задачі стала робота Кюнці та Шапіро (див. [33]), метою якої була побудова неперервного оператора одночасного продовження неперервних функцій.

У [62] простір неперервних псевдометрик, заданих на елементах множини $\exp X$ з топологією В'єторіса, розглядався як підпростір простору $\exp(X \times X \times \mathbb{R})$. При цьому кожна псевдометрика ототожнювалася зі своїм графіком, який є компактною підмножиною простору $X \times X \times \mathbb{R}$. Нормою псевдометрики $\varrho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ є число $\|\varrho\| = \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$. Нехай $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}} = \cup\{\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A) : A \in \exp X\}$. Відображення $u \colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ називається регулярним, якщо $\|u(\varrho)\| = \|\varrho\|$ для кожного $\varrho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$.

При побудові оператора продовження використана наступна теорема Фришковського (див. [26]) про існування неперервної селекції для багатозначного відображення. Нехай $(T, \mathcal{A}, \mu)$ — компактний простір з неатомарною мірою μ на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин простору T і B — сепарабельний банаховий простір. Тоді для кожного напівнеперервного знизу багатозначного відображення F, що діє з метричного компакту X у простір $L^1(T, B)$, значення якого є замкнені і розкладні, існує однозначна неперервна селекція.

Теорема Фришковського використана у [62] для випадку $T = I = [0, 1]$ з мірою Лебега і в припущенні, що метричний компакт X вкладений у банахів простір B. Доведено, що відображення F з

$\exp X \times X$ у $\mathcal{Q}(L^1(I, B))$, визначене за формулою

$$F(A, x) = \begin{cases} \{x\} = L^1(I, \{x\}), & \text{якщо } x \in A, \\ L^1(I, A), & \text{якщо } x \notin A. \end{cases},$$

задовольняє умови теореми про селекцію. Тому існує неперервна селекція $f\colon \exp X \times X \to L^1(X, B)$ відображення F, і оператор продовження $u\colon \mathcal{PM}_\mathrm{c} \to \mathcal{PM}_\mathrm{c}(X)$ має вигляд

$$u(\varrho)(x, y) = \int_0^1 \varrho(f(\mathrm{dom}(\varrho), x)(t), f(\mathrm{dom}(\varrho), y)(t))dt.$$

Побудований оператор одночасного продовження псевдометрик з $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ є лінійним, регулярним та неперервним відображенням. Крім цього, за допомогою конструкції, відомої з [48] чи [10], а саме нескінченної суми операторів, що “розділяють точки”, побудовано лінійний регулярний оператор одночасного продовження метрик, заданих на замкнених підмножинах простору X.

1.4. Продовження метрик зі спеціальними властивостями

Метрика ϱ на множині X називається ультраметрикою (неархімедовою метрикою) якщо $\varrho(x,y) \le \max\{\varrho(x,z),\varrho(z,y)\}$ для довільних $x,y,z \in X$. Де Гроот [17] довів, що для метризовного простору X існує ультраметрика, що породжує його топологію, тоді і лише тоді, коли $\dim X = 0$.

Для компактної підмножини A простору X нехай $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ — множина всіх неперервних ультраметрик на A. Множина $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ є замкненою відносно операцій взяття поточкового максимуму та множення на додатнє число. Нехай $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}} = \cup\{\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) : A \in \exp X,\ |A| \ge 2\}$. Аналогом задачі, що розглядалася у [62] є питання існування неперервного оператора одночасного продовження ультраметрик, який зберігає операцію взяття максимуму двох ультраметрик. Оператор $u\colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$, який має всі згадані властивості, крім однорідності, побудовано Е. Д. Тимчатином і М. М. Зарічним у [63]. Крім цього, цей оператор зберігає вимір Асуада (див. [5],[6]), тобто $\dim_A(\mathrm{dom}(\rho),\rho) = \dim_A(X,u(\rho))$.

Якщо замінити аксіому $\varrho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ на $x=y \Rightarrow \varrho(x,y)=0$, отримаємо поняття ультрапсевдометрики. Задачу існування оператора продовження можна перенести для випадку ультрапсевдометрик.

У [64] зауважено, що гаусдорфова метрика на гіперпросторі ультраметричного простору є ультраметрикою. Звідси випливає існування функторіального оператора продовження ультраметрик на множину $\exp X$.

РОЗДІЛ 2

ОЗНАЧЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2.1. Деякі факти з теорії гіперпросторів та багатозначних відображень

Введемо ряд означень і результатів з теорії гіперпросторів, які будемо використовувати надалі. Впродовж цього підрозділу вважатимемо, що всі топологічні простори є гаусдорфовими.

Означення 2.1. *Нехай X — топологічний простір, а $\mathrm{CL}(X)$ — множина всіх непорожніх замкнених підмножин простору X. Топологія Фелла $\mathcal{T}_F$ на $\mathrm{CL}(X)$ має передбазу, що складається з усіх множин вигляду $V^- = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \cap V \neq \varnothing\}$, де V — непорожня відкрита підмножина простору X , та всеможливих множин вигляду $W^+ = \{A \in \mathrm{CL}(X) : A \subset W\}$, де W — непорожня відкрита підмножина в X, яка має компактне доповнення.*

Відомим є наступний критерій збіжності у топології Фелла напрямленості замкнених підмножин метричного простору (див. [11, наслідок 5.1.7]). Нехай (X, d) — метричний простір, $A \in \mathrm{CL}(X)$ і нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — напрямленість у просторі $\mathrm{CL}(X)$. Тоді $A = \mathcal{T}_F - \lim A_\lambda$ тоді й лише тоді, коли для довільної компактної підмножини K простору X виконуються умови

$$\lim_\lambda e_d(A \cap K, A_\lambda) = 0 \text{ і } \lim_\lambda e_d(A_\lambda \cap K, A) = 0,$$

де $e_d(B, C) = \sup_{b\in B} d(b, C)$ (ексцес множини B щодо множини C) для замкнених підмножин B і C простору X.

Відомо, що простір $(\mathrm{CL}(Y), \mathcal{T}_F)$ є сепарабельним і метризовним повною метрикою, якщо Y локально компактний простір з другою аксіомою зліченності ([25]).

Означення 2.2. *Нехай X — топологічний простір, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — напрямленість підмножин простору X.*

(i) Точка x_0 називається граничною точкою напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, якщо для будь-якого околу W точки x_0 існує індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такий, що $W \cap A_\lambda \neq \varnothing$ для довільного $\lambda \geq \lambda_0$.

(ii) Точка x_0 називається точкою згущення напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, якщо для будь-якого околу W точки x_0 і для довільного $\lambda \in \Lambda$ існує $\lambda_1 \geq \lambda$ таке, що $W \cap A_{\lambda_1} \neq \varnothing$.

Будемо позначати множину всіх граничних точок напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ через $\mathrm{Li}\, A_\lambda$, а множину всіх точок згущення — через $\mathrm{Ls}\, A_\lambda$. Множину $\mathrm{Li}\, A_\lambda$ також називають нижньою замкненою границею, а множину $\mathrm{Ls}\, A_\lambda$ — верхньою замкненою границею напрямленості $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ [36]. Вперше ці поняття введені Пенлеве.

Означення 2.3. *Нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — напрямленість підмножин топологічного простору X і нехай A — (замкнена) підмножина простору X. Будемо говорити, що напрямленість $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ збігається до A у сенсі Куратовського-Пенлеве та писати $A = \mathrm{K\text{-}lim}\, A_\lambda$, якщо $\mathrm{Li}\, A_\lambda = \mathrm{Ls}\, A_\lambda = A$.*

Поняття збіжності послідовності множин, визначене як рівність верхньої і нижньої замкнених границь, вперше зустрічається у роботах Гаусдорфа, пізніше — у монографії Куратовського [36]. Нагадаємо необхідну й достатню умову збіжності напрямленості підмножин топологічного простору в сенсі Куратовського-Пенлеве [11, лема 5.2.4]. Нехай A — замкнена підмножина топологічного простору X і нехай $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — напрямленість підмножин простору X. $A = \text{K-}\lim A_\lambda$ тоді й лише тоді, коли $A \subset \operatorname{Li} A_\lambda$ і $\operatorname{Ls} A_\lambda \subset A$. Для топологічного простору X розглянемо довільну функцію $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$. Множину $\operatorname{epi}(f) = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le a\}$ називають епіграфіком функції f, а множину $\operatorname{hypo}(f) = \{x, a) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \ge a\}$ — гіпографіком f. Функцію f називають напівнеперервною знизу (зверху), якщо $\operatorname{epi}(f)$ (відповідно $\operatorname{hypo}(f)$) є замкненою підмножиною простору $X \times \mathbb{R}$. Еквівалентно, функція f є напівнеперервною знизу (зверху), якщо для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ множина $\{x \in X : f(x) > (<)t\}$ відкрита в X. Очевидно, що, якщо функція f напівнеперервна знизу, то функція $-f$ напівнеперервна зверху й навпаки.

Означення 2.4. *Нехай X — топологічний простір і $\{f_\lambda\}$ — напрямленість напівнеперервних знизу (зверху) функцій, визначених на X. Напрямленість $\{f_\lambda\}$ називають epi-збіжною (hypo-збіжною) у сенсі Куратовського-Пенлеве до напівнеперервної знизу (зверху) функції f, якщо* $\operatorname{epi}(f) = \text{K-}\lim \operatorname{epi}(f_\lambda)$ *(*$\operatorname{hypo}(f) = \text{K-}\lim \operatorname{hypo}(f_\lambda)$*).*

Нехай X — топологічний простір з першою аксіомою зліченності, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність напівнеперервних знизу функцій, заданих на X . Доведено [11, теорема 5.3.5], що $f = \text{K-}\lim f_n$ тоді й лише тоді, коли для кожного $x \in X$ виконуються наступні умови:

(i) існує послідовність $\{x_n\}$, збіжна до точки x така, що

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_n);$$

(ii) для довільної послідовності $\{x_n\}$, збіжної до точки x,

$$f(x) \le \liminf_{n\to+\infty} f_n(x_n).$$

Очевидно, що для напівнеперервних зверху функцій можна отримати аналогічний результат з умовою (ii)' для довільної послідовності $\{x_n\}$, збіжної до x, $f(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} f_n(x_n)$ замість умови (ii). Відомим є також такий факт [11]. Epi-збіжність напрямленості (послідовності) напівнеперервних знизу функцій, заданих на локально компактному (з першою аксіомою зліченності) топологічному просторі, — це збіжність у топології Фелла. При цьому вважаємо, що функції ототожнюються зі своїми епіграфіками. Аналогічний результат має місце для напівнеперервних зверху функцій, ототожнених зі своїми гіпографіками.

Нехай U та K — довільні відповідно відкрита та компактна підмножини топологічного простору X, a, b — довільні дійсні числа, $a \leq b$, $C(X)$ — множина дійсних неперервних функцій, заданих на X, наділена топологією Фелла (кожна функція ототожнюється зі своїм графіком). Нехай

$$(X, U, a, b)^- = C(X) \cap (U \times (a, b))^-,$$
$$(X, K, a, b)^+ = C(X) \cap ((K \times [a, b])^c)^+.$$

Тоді сім'я

$$\mathcal{F}(X) = \{(X, U, a, b)^- : U \text{ — відкрита в } X, a, b \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\cup \{(X, K, a, b)^+ : K \text{ — компактна в } X, a, b \in \mathbb{R}\}$$

утворює передбазу топології Фелла на множині $C(X)$ (див. [31]).

Для довільних відповідно відкритої та компактної підмножин U та K топологічного простору $X \times X$, дійсних чисел a, b, $a \leq b$ будемо використовувати наступні позначення

$$[X, U, a, b]^- = \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X) \cap (U \times (a, b))^-,$$
$$[X, K, a, b]^+ = \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X) \cap ((K \times [a, b])^c)^+.$$

Тоді простір $(\mathcal{PM}_c(X), \mathcal{T}_F)$ можна розглядати як підпростір простору $(C(X \times X), \mathcal{T}_F)$.

Відомим є факт, що топологія Фелла $\mathcal{T}_F$ на множині неперервних дійсних функцій $C(Y)$ рівна компактно-відкритій топології $\mathcal{T}_{co}$ на $C(Y)$ тоді і лише тоді, коли кожна компактна підмножина простору Y міститься у скінченному об'єднанні компактних зв'язних підмножин в Y, кожна з яких має непорожню внутрішність (див. [31]). Рівність топологій $\mathcal{T}_F$ та $\mathcal{T}_{co}$ на $C(Y)$ також має місце, коли простір Y локально компактний і локально зв'язний.

Позначимо через $\exp X$ простір усіх непорожніх компактних підмножин простору X, наділений топологією В'єторіса. Ця топологія породжується базою, що складається з всеможливих множин вигляду

$$\langle V_1, \ldots, V_n \rangle = \{A \in \exp X : A \subset \cup_{k=1}^n V_k, A \cap V_k \neq \varnothing \text{ для всіх } k\},$$

де $\{V_1, \ldots, V_n\}$ — скінченна сім'я відкритих підмножин простору X.

Якщо d — метрика, що породжує топологію на X, то топологія В'єторіса на множині $\exp X$ породжується гаусдорфовою метрикою d_H, що визначається за формулою

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, B),\ \sup_{b \in B} d(b, A)\right\}.$$

Означення 2.5. *Нехай X, Y — топологічні простори. Багатозначне відображення $G\colon X \to \mathcal{Q}(Y)$ називається напівнеперервним знизу, якщо множина*

$$\widetilde{U} = \{x \in X : G(x) \cap U \neq \varnothing\}$$

відкрита в X для кожної відкритої підмножини U простору Y.

Нехай $(H, \|\cdot\|)$ — банаховий простір і нехай $L^1([0,T],H)$ — банаховий простір функцій, інтегровних за Бохнером, що діють з інтервалу $[0,T]$ в H. Для кожного $u \in L^1([0,T],H)$,

$$\|u\| = \int_0^T \|u(t)\| dt.$$

Підмножина D простору $L^1([0,T],H)$ називається розкладною, якщо для довільних $u_1, u_2 \in D$ та $C \subset [0,T]$ маємо

$$u_1\chi(C) + u_2\chi([0,T] \setminus C) \in D,$$

де через χ позначаємо індикатор. Сформулюємо теорему про селекцію для багатозначного відображення Брессана та Коломбо [15], яку використаємо при побудові оператора продовження псевдометрик.

Теорема 2.1. *Нехай Y — сепарабельний метричний простір,*

$$G\colon Y \to \mathcal{Q}(L^1([0,T],H)) \text{ — }$$

напівнеперервне знизу багатозначне відображення, яке має замкнені розкладні значення. Тоді існує неперервне однозначне відображення $g\colon Y \to L^1([0,T],H)$ таке, що $g(y) \in G(y)$ для довільного $y \in Y$.

Сформулюємо теорему Майкла про існування селекції для багатозначного відображення у нульвимірному випадку (див. [42]).

Теорема 2.2. *Нехай Y — паракомпактний топологічний простір такий, що $\dim Y = 0$ і нехай Z — метризовний повною метрикою простір. Якщо багатозначне відображення $G\colon Y \to \mathrm{CL}(Z)$ напівнеперервне знизу, то існує селекція відображення G, тобто неперервне відображення $g\colon Y \to Z$ таке, що $g(y) \in G(y)$ для кожного $y \in Y$.*

2.2. Вимір Асуада метричного простору

Нагадаємо поняття виміру Асуада довільного метричного простору (Y, r) (див. [5], [6], [29], [39]). Нехай s, t — невід'ємні числа. Простір (Y, r) називається (s, t) -однорідним, якщо для чисел $a > 0$, $b > 0$, $b \geq a$ і довільної множини $Y_0 \subset Y$ такої, що $a \leq r(x, y) \leq b$ для всіх $x, y \in Y_0$, $x \neq y$, виконується нерівність $|Y_0| \leq s(b/a)^t$. Простір (Y, r) називається t-однорідним, якщо він (s, t)-однорідний для деякого $s \geq 0$. Виміром Асуада метричного простору (Y, r) називається число

$$\dim_A(Y, r) = \inf\{t \geq 0 : (Y, r) \text{ є } t\text{-однорідним }\},$$

якщо інфімум існує. У протилежному випадку $\dim_A(Y, r) = \infty$.

РОЗДІЛ 3

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ПРОДОВЖЕННЯ ПСЕВДОМЕТРИК, ВИЗНАЧЕНИХ НА ОПУКЛИХ ПІДМНОЖИНАХ ЛОКАЛЬНО ОПУКЛИХ ПРОСТОРІВ

Даний розділ присвячено побудові та опису властивостей операторів продовження псевдометрик, визначених на опуклих підмножинах локально опуклих просторів. Зокрема розглянуто задачі одночасного продовження напівнеперервних зверху псевдометрик, визначених на замкнених опуклих підмножинах компактного локально опуклого простору, неперервних псевдометрик, визначених на опуклих тілах в евклідовому просторі. Також описано властивості операторів одночасного продовження ліпшицевих псевдометрик.

3.1. Оператор одночасного продовження напівнеперервних зверху псевдометрик

У цьому підрозділі розглянуто оператор продовження напівнеперервних зверху (псевдо)метрик, заданих на замкнених опуклих підмножинах локально опуклого простору. Псевдометрики при цьому ототожнюються з їх гіпографіками, одержаний оператор продовження є неперервним у топології Фелла. Такий підхід до введення топології на множинах напівнеперервних функцій запропонований, зокрема, у роботі Р. Війзмана [66].

Нехай X — опуклий метризовний компактний підпростір локально опуклого простору L. Тоді X є гомеоморфним підпросторові гільбертового простору l_2. Справді, існує зліченна сім'я лінійних функціоналів $\{\varphi_i : L \to \mathbb{R} : i \in \mathbb{N}\}$, яка розділяє точки простору

X, тобто для довільних $x, y \in X$ таких, що $x \neq y$, існує натуральне число $j = j(x, y)$ таке, що $\varphi_j(x) \neq \varphi_j(y)$. Нехай

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2^i \max\limits_{y \in X} |\, \varphi_i(y)\,|} \text{ для всіх } x \in X \text{ та } i \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\widetilde{\varphi}_i(X) \subset [-1/2^i, 1/2^i]$ для довільного i, то

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\widetilde{\varphi}_i(x))^2 \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} < +\infty.$$

Тепер означимо гомеоморфне вкладення $\Phi : X \to l_2$ за формулою

$$\Phi(x) = (\widetilde{\varphi}_1(x), \widetilde{\varphi}_2(x), \widetilde{\varphi}_3(x), \dots)$$

для довільного $x \in X$. Для довільного $C \in \mathrm{cc}(X)$ розглянемо множину $\mathcal{USCPM}_{cc}(C)$ всіх напівнеперервних зверху псевдометрик на C та множину

$$\mathcal{USCPM}_{cc} = \bigcup \{\mathcal{USCPM}_{cc}(C) : C \in cc(X)\}$$

всіх часткових напівнеперервних зверху псевдометрик. Для будь-яких $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ та $A \in \mathrm{cc}(X)$ будемо писати $\mathrm{dom}(\sigma) = A$, якщо $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}(A)$. Означимо топологію на $\mathcal{USCPM}_{cc}$ так. Ототожнюючи кожну псевдометрику $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ з її гіпографіком

$$\mathrm{hypo}(\sigma) = \{(x, y, t) \in \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathbb{R} : t \leq \sigma(x, y)\} \in$$

$$\in \mathrm{CL}(X \times X \times \mathbb{R}),$$

розглядаємо простір $\mathcal{USCPM}_{cc}$ як підпростір простору $\mathrm{CL}(X \times X \times \mathbb{R})$ з топологією Фелла. Вважаємо, що на $\mathrm{cc}(X)$ також задана топологія Фелла. Оскільки для довільної множини $C \in \mathrm{cc}(X)$, чисел $\lambda, \lambda_1 \geq 0$ та псевдометрик $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{USCPM}_{cc}(C)$ виконується умова

$$\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1 \in \mathcal{USCPM}_{cc}(C),$$

бачимо, що множина $\mathcal{USCPM}_{cc}(C)$ утворює додатній конус.

Нехай ρ — метрика на X, що породжується нормою простору l_2 . Відомо, що для кожної точки x і довільної опуклої замкненої множини C у гільбертовому просторі існує єдина метрична проекція точки x на множину C. Означимо відображення $s\colon \mathrm{cc}(X)\times X \to X$, яке ставить у відповідність довільним $C \in \mathrm{cc}(X)$ та $x \in X$ метричну проекцію точки x на множину C, тобто

$$\rho(x, C) = \rho(x, s(C, x)) = \min_{y\in C} \rho(x, y).$$

Твердження 3.1. *Відображення* $s\colon \mathrm{cc}(X) \times X \to X$ *є неперервним.*

Доведення. Оскільки X — компактний простір, топологія Фелла на $\mathrm{cc}(X)$ є топологією, породженою метрикою Гаусдорфа ρ_H. Візьмемо довільну послідовність $\{(B_n, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathrm{cc}(X)\times X$, яка збігається до $(B, x) \in \mathrm{cc}(X) \times X$. Доведемо, що $s(B_n, x_n) \to s(B, x)$. Нехай d — метрика на $\mathrm{cc}(X) \times X$, означена формулою

$$d[(A, y),(A', y')] = \rho_H(A, A') + \rho(y, y')$$

для довільних $A, A' \in \mathrm{cc}(X)$ та $y, y' \in X$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Існує натуральне число n_0 таке, що $\rho_H(B, B_n) < \varepsilon/2$ і $\rho(x, x_n) < \varepsilon/2$ для кожного $n > n_0$. Нехай $n > n_0$. Тоді існує елемент $b \in B$ такий, що $\rho(b, s(B_n, x_n)) < \varepsilon/2$ і елемент $c \in B_n$ такий, що $\rho(c, s(B, x)) < \varepsilon/2$. Отримуємо

$$\rho(x, B) \le \rho(x, b) \le \rho(x, x_n) + \rho(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x_n, s(B_n, x_n))+$$

$$+\rho(s(B_n, x_n), b) < \rho(x_n, s(B_n, x_n)) + \varepsilon = \rho(x_n, B_n) + \varepsilon.$$

Аналогічно

$$\rho(x_n, B_n) \le \rho(x_n, c) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, c) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(x, s(B, x))+$$

$$+\rho(s(B,x),c) < \rho(x,s(B,x)) + \varepsilon = \rho(x,B) + \varepsilon.$$

Отже, $|\rho(x_n,B_n) - \rho(x,B)| < \varepsilon$. Тепер припустимо, що $\{s(B_n,x_n)\}$ не збігається до $s(B,x)$. Тоді існує підпослідовність $\{s(B_{n_k},x_{n_k})\}$, яка збігається до деякої точки $y \in X$, відмінної від $s(B,x)$. Можливі два випадки.

1°. Нехай $y \in B$. Отримаємо

$$\rho(x_{n_k},B_{n_k}) = \rho(x_{n_k},s(B_{n_k},x_{n_k})) \to \rho(x,y)$$

і

$$\rho(x_{n_k},B_{n_k}) \to \rho(x,B) = \rho(x,s(B,x)).$$

Оскільки $y \neq s(B,x)$, то існують дві різні метричні проекції точки x на множину B. Суперечність.

2°. Нехай $y \notin B$. Тоді існує окіл U точки y такий, що $U \cap B = \varnothing$. Отже, існує натуральне число k_0 таке, що $s(B_{n_k},x_{n_k}) \in U$ для будь-якого $k > k_0$. Тому можна знайти число $M > 0$ таке, що $\rho(s(B_{n_k},x_{n_k}),B) \geq M > 0$ для довільного $k > k_0$. Це суперечить збіжності послідовності $\{B_n\}$ до B. Таким чином, $s(B_n,x_n) \to s(B,x)$. □

Тепер означимо оператор $w : \mathcal{USCPM}_{cc} \to \mathbb{R}^{X\times X}$ наступною формулою

$$w(\sigma)(x,y) = \sigma(s(\mathrm{dom}(\sigma),x), s(\mathrm{dom}(\sigma),y))$$

для довільних $x,y \in X$ та $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$.

Твердження 3.2. *Оператор w є оператором продовження напівнеперервних зверху псевдометрик, заданих на замкнених опуклих підмножинах простору X.*

Доведення. Очевидно, що для кожного $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ функція $w(\sigma)$ — псевдометрика на X і що $w(\sigma)(x,y) = \sigma(x,y)$, якщо $x,y \in$

$\mathrm{dom}(\sigma)$. Доведемо, що $w(\sigma) \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ для кожної псевдометрики $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$. Візьмемо довільні число $t > 0$ і точку $(x_0, y_0) \in X \times X$ такі, що $w(\sigma)(x_0, y_0) < t$. Тоді

$$\sigma(s(\mathrm{dom}(\sigma), x_0), s(\mathrm{dom}(\sigma), y_0)) < t,$$

і з напівнеперервності зверху псевдометрики σ випливає існування околу $V \times W$ (V, W — відкриті підмножини в просторі $\mathrm{dom}(\sigma)$) точки $(s(\mathrm{dom}(\sigma), x_0), s(\mathrm{dom}(\sigma), y_0))$ в просторі $\mathrm{dom}(\sigma) \times \mathrm{dom}(\sigma)$ такого, що $\sigma(a, b) < t$ для довільної точки $(a, b) \in V \times W$. З неперервності відображення s випливає, що множина $U = s^{-1}(V) \times s^{-1}(W)$ є околом точки (x_0, y_0) в $X \times X$ таким, що $w(\sigma)(x, y) < t$ для всіх $(x, y) \in U$. Отже, $w(\sigma)$ — напівнеперервна зверху псевдометрика на X. □

Твердження 3.3. *Для будь-якої множини $C \in \mathrm{cc}(X)$ звуження оператора w на множину $\mathcal{USCPM}_{cc}(C)$ є лінійним оператором, тобто для довільних чисел $\lambda, \lambda_1 \geq 0$ та псевдометрик $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{USCPM}_{cc}(C)$ виконується умова*

$$w(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1) = \lambda w(\sigma) + \lambda_1 w(\sigma_1).$$

Доведення. Доведення даного твердження легко випливає з побудови оператора продовження w. □

Твердження 3.4. *Нехай $\{\sigma_n\}$ — послідовність в $\mathcal{USCPM}_{cc}$, що збігається до елемента $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ у сенсі Куратовського-Пенлеве, тобто $\mathrm{hypo}(\sigma) = \mathrm{K\text{-}lim}\,\mathrm{hypo}(\sigma_n)$. Нехай $A = \mathrm{dom}(\sigma)$, $A_n = \mathrm{dom}(\sigma_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді для довільної точки $(x, y) \in \partial A \times \partial A$ виконуються наступні умови:*

(i) для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $(x_n, y_n) \in \partial A_n \times \partial A_n$ така, що послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ збігається до (x, y) і $\sigma(x, y) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n(x_n, y_n)$;

(ii) якщо довільна послідовність $\{(x_n, y_n) \in \partial A_n \times \partial A_n\}$ збігається до точки (x, y), то $\sigma(x, y) \geq \limsup_{n\to+\infty} \sigma_n(x_n, y_n)$.

Доведення. Спочатку доведемо виконання умови (ii). Нехай (x, y) — довільна точка з $\partial A \times \partial A$ і $\{(x_n, y_n) \in \partial A_n \times \partial A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — послідовність, збіжна до (x, y). Якщо $\limsup_{n\to+\infty} \sigma_n(x_n, y_n) = 0$, то умова (ii) теореми очевидна. Припустимо протилежне. Візьмемо довільне додатне число $t < \limsup_{n\to+\infty} \sigma_n(x_n, y_n)$. Існує зростаюча послідовність натуральних чисел $\{n_k\}$ така, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\sigma_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}) > t$. Таким чином, $(x_{n_k}, y_{n_k}, t) \in \mathrm{hypo}(\sigma_{n_k})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mathrm{Ls}\,\mathrm{hypo}(\sigma_n) \subset \mathrm{hypo}(\sigma)$, отримаємо, що $(x, y, t) \in \mathrm{hypo}(\sigma)$, тобто $\sigma(x, y) \geq t$.

Доведемо тепер виконання умови (i). Оскільки простір X компактний, то границя у сенсі Куратовського-Пенлеве й границя у топології Фелла однакові для замкнених підмножин простору X. Оскільки $\mathrm{hypo}(\sigma) = \text{K-}\lim \mathrm{hypo}(\sigma_n)$, то $A = \mathcal{T}_F - \lim A_n$, тому $\rho_H(A_n, A) \to 0$. Отже, $\partial A_n \to \partial A$. Таким чином,

$$(x, y, \sigma(x, y)) \in \mathrm{hypo}(\sigma) = \text{ Li } \mathrm{hypo}(\sigma_n)$$

і

$$(x, y) \in \partial A \times \partial A = \text{ Li } (\partial A_n \times \partial A_n).$$

Тепер нехай $\{V_k \times W_k \subset (X \times X) \times \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}$ — зліченна база в точці $(x, y, \sigma(x, y))$ така, що $V_{k+1} \times W_{k+1} \subset V_k \times W_k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. З попередніх міркувань випливає, що для довільного натурального k існує натуральне число n_k таке, що $(\partial A_n \times \partial A_n) \cap V_k \neq \varnothing$ для будь-якого $n > n_k$ і $\mathrm{hypo}(\sigma_n) \cap (V_k \times W_k) \neq \varnothing$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ (зокрема, для кожного k число n_k можна вибрати більшим, ніж $\max\{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$). Для кожного $n > n_k$ виберемо $(a_{n_k}, b_{n_k}) \in \partial A_n \times \partial A_n$ і $r_{n_k} \in \mathbb{R}$ такі, що $(a_{n_k}, b_{n_k}, r_{n_k}) \in$

$\mathrm{hypo}(\sigma_n) \cap (V_k \times W_k)$. Нехай $(x_n, y_n, t_n) = (a_{n_k}, b_{n_k}, r_{n_k})$ для $n_k < n \leq n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(x, y, \sigma(x, y)) = \lim_{n \to +\infty} (x_n, y_n, t_n).$$

Оскільки $t_n \leq \sigma_n(x_n, y_n)$ для довільного n, то

$$\sigma(x, y) = \lim_{n \to +\infty} t_n \leq \liminf_{n \to +\infty} \sigma_n(x_n, y_n).$$

З умови (ii) випливає, що $\sigma(x, y) \geq \limsup_{n \to +\infty} \sigma_n(x_n, y_n)$. Звідси отримуємо $\sigma(x, y) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(x_n, y_n)$. □

Твердження 3.5. *Оператор* $w : \mathcal{USCPM}_{cc} \to \mathcal{USCPM}_{cc}(X)$ *неперервний у топології Фелла на* $\mathcal{USCPM}_{cc}$.

Доведення. Нехай $\{\sigma_n\}$ — послідовність в $\mathcal{USCPM}_{cc}$, збіжна до $\sigma \in \mathcal{USCPM}_{cc}$, тобто $\mathrm{hypo}(\sigma) = \mathcal{T}_F - \lim \mathrm{hypo}(\sigma_n)$. Оскільки простір $X \times X \times \mathbb{R}$ задовольняє першу аксіому зліченності, то поняття збіжності в топології Фелла та у сенсі Куратовського-Пенлеве замкнених підмножин простору $X \times X \times \mathbb{R}$ тотожні. Тому достатньо довести, що для довільної точки $(x, y) \in X \times X$ виконуються умови:

(а) існує послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ в $X \times X$, що збігається до точки (x, y), така, що $w(\sigma)(x, y) = \lim_{n \to +\infty} w(\sigma_n)(x_n, y_n)$;

(б) якщо послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ в $X \times X$ збігається до точки (x, y), то $w(\sigma)(x, y) \geq \limsup_{n \to +\infty} w(\sigma_n)(x_n, y_n)$.

Нехай $A = \mathrm{dom}(\sigma)$ і $A_n = \mathrm{dom}(\sigma_n)$ для $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільну точку $(x, y) \in X \times X$. Доведемо, що виконується умова (б). Нехай $\{(x_n, y_n)\}$ — послідовність в $X \times X$, яка збігається до (x, y). Тоді $w(\sigma)(x, y) = \sigma(s(A, x), s(A, y))$ і

$$w(\sigma_n)(x_n, y_n) = \sigma_n(s(A_n, x_n), s(A_n, y_n))$$

для $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\mathrm{hypo}(\sigma_n) \to \mathrm{hypo}(\sigma)$, то $A_n \to A$, і за неперервністю відображення s маємо

$$(s(A_n, x_n), s(A_n, y_n)) \to (s(A, x), (A, y)).$$

За твердженням 3.4

$$\sigma(s(A, x), s(A, y)) \geq \limsup_{n \to +\infty} \sigma_n(s(A_n, x_n), s(A_n, y_n)),$$

тому виконується умова (б).

Перевіримо виконання умови (а). За твердженням 3.4 для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує точка $(a_n, b_n) \in \partial A_n \times \partial A_n$ така, що послідовність $\{(a_n, b_n)\}$ збігається до $(s(A, x), s(A, y))$ і $\sigma(s(A, x), s(A, y)) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n(a_n, b_n)$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ можна вибрати $(x_n, y_n) \in X \times X$ так, щоб $s(A_n, x_n) = a_n$, $s(A_n, y_n) = b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Тоді $w(\sigma_n)(x_n, y_n) \to w(\sigma)(x, y)$ і, отже, умова (а) виконується. $\square$

Отже, основний результат даного підрозділу можна сформулювати так.

Теорема 3.1. *Нехай X — опуклий метризовний компактний підпростір деякого локально опуклого простору. Тоді існує відображення $w\colon \mathcal{USCPM}_{cc} \to \mathcal{USCPM}_{cc}(X)$, яке має наступні властивості для довільних псевдометрик $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{USCPM}_{cc}$ та чисел $\lambda, \lambda_1 \geq 0$:*

1) $w(\sigma)$ є продовженням псевдометрики σ на простір X;

2) $w(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1) = \lambda w(\sigma) + \lambda_1 w(\sigma_1)$, якщо $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma_1)$;

3) w — неперервне відображення.

3.2. Продовження напівнеперервних зверху метрик, визначених на фіксованій множині

У цьому підрозділі розглянемо задачу продовження напівнеперервних зверху метрик, заданих на фіксованій замкненій опуклій підмножині простору X. Зафіксуємо довільну множину $A \in \mathrm{cc}(X)$. Позначимо через $\mathcal{USCM}_{cc}(A)$ та $\mathcal{USCM}_{cc}(X)$ множини всіх напівнеперервних зверху метрик, заданих відповідно на A та на X, розглядаючи ці множини як підпростори $\mathcal{USCPM}_{cc}$.

Теорема 3.2. *Нехай X — опуклий метризовний компактний підпростір локально опуклого простору, A — замкнена опукла підмножина простору X. Тоді існує оператор $\widetilde{w} : \mathcal{USCM}_{cc}(A) \to \mathcal{USCM}_{cc}(X)$, який задовольняє наступні умови для довільних чисел $\lambda, \lambda_1 \geq 0$ таких, що $\lambda + \lambda_1 = 1$ та метрик $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{USCM}(A)$:*

1) $\widetilde{w}(\sigma)$ є продовженням псевдометрики σ на простір X;

2) $\widetilde{w}(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1) = \lambda\widetilde{w}(\sigma) + \lambda_1\widetilde{w}(\sigma_1)$;

3) $\widetilde{w}$ — неперервне відображення.

Доведення. Існує неперервна псевдометрика ρ_0 на X, яка має наступні властивості:

a) $\rho_0(a, b) = 0$, якщо $a, b \in A$;

b) $\rho_0(x, a) > 0$, якщо $x \in X \setminus A$ і $a \in A$;

c) якщо $x, y \in X \setminus A$, то $\rho_0(x, y) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x = y$.

Зокрема, ρ_0 можна вибрати таким чином. Розглянемо фактор-простір X/A і виберемо довільну неперервну метрику ρ' на X/A. Позначимо через q фактор-відображення з X в X/A. Тоді псевдометрика $\rho_0 = \rho' \circ (q \times q)$ задовольняє умови a)-c). Тепер означимо оператор $\widetilde{w}: \mathcal{USCM}_{cc}(A) \to \mathbb{R}^{X\times X}$ так:

$$\widetilde{w}(\sigma)(x,y) = w(\sigma)(x,y) + \rho_0(x,y)$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{USCM}_{cc}(A)$ та $x, y \in X$. Очевидно, що $\widetilde{w}(x,y) > 0$ тоді й лише тоді, коли $x \neq y$, і що $\widetilde{w}(\sigma)(x,y) = \sigma(x,y)$, якщо $x, y \in A$. Також очевидно, що для $w(\sigma)$ виконується нерівність трикутника. Оскільки сума двох напівнеперервних зверху функцій є напівнеперервною зверху функцією, то отримаємо $w(\sigma) + \rho_0 \in \mathcal{USCM}_{cc}(X)$ для кожного $\sigma \in \mathcal{USCM}_{cc}(A)$. Таким чином, відображення $\widetilde{w}$ — оператор продовження напівнеперервних зверху метрик, заданих на A.

З побудови відображення $\widetilde{w}$ легко випливає умова збереження опуклих комбінацій псевдометрик. Справді, для довільних $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{USCM}(A)$, $\lambda, \lambda_1 \geq 0$ таких, що $\lambda + \lambda_1 = 1$ та $x, y \in X$ отримаємо

$$\widetilde{w}(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1)(x,y) = w(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1)(x,y) + \rho_0(x,y) =$$

$$= \lambda w(\sigma)(x,y) + \lambda_1 w(\sigma_1)(x,y) + (\lambda + \lambda_1)\rho_0(x,y) =$$

$$= \lambda\widetilde{w}(\sigma)(x,y) + \lambda_1\widetilde{w}(\sigma_1)(x,y).$$

Тепер доведемо, що оператор $\widetilde{w}: \mathcal{USCM}_{cc}(A) \to \mathcal{USCM}_{cc}(X)$ є неперервним. Необхідно переконатися, що для довільної послідовності $\{\sigma_n\}$ з $\mathcal{USCM}_{cc}(A)$ такої, що $\mathrm{hypo}(\sigma_n) \to \mathrm{hypo}(\sigma)$ для деякої метрики $\sigma \in \mathcal{USCM}_{cc}(A)$, послідовність $\{\mathrm{hypo}(\widetilde{w}(\sigma_n))\}$ збігається до $\mathrm{hypo}(\widetilde{w}(\sigma))$. Досить довести, що для будь-якої точки $(x,y) \in X \times X$ виконуються умови:

1) існує послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ в $X \times X$, що збігається до точки (x,y), така, що $\widetilde{w}(\sigma)(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \widetilde{w}(\sigma_n)(x_n, y_n)$;

2) якщо послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ в $X\times X$ збігається до точки (x,y), то $\widetilde{w}(\sigma)(x,y) \geq \limsup_{n\to+\infty} \widetilde{w}(\sigma_n)(x_n, y_n)$.

Оскільки послідовність $\{\sigma_n\}$ збігається до σ в $\mathcal{USCM}_{cc}(A)$, то вона також збігається і в просторі $\mathcal{USCPM}_{cc}$. Розглянемо довільну точку $(x,y) \in X \times X$. За неперервністю оператора w існує послідовність $\{(x_n, y_n)\}$, збіжна до (x,y), така, що $w(\sigma)(x,y) = \lim_{n\to+\infty} w(\sigma_n)(x_n,y_n)$. З неперервності ρ_0 виплиає, що $\rho_0(x_n,y_n) \to \rho_0(x,y)$. Отже,

$$\widetilde{w}(\sigma_n)(x_n,y_n) = w(\sigma_n)(x_n,y_n) + \rho_0(x_n,y_n) \to$$

$$\to w(\sigma)(x,y) + \rho_0(x,y) = \widetilde{w}(\sigma)(x,y).$$

Подібно для довільної послідовності $\{(x_n,y_n)\}$, збіжної до (x,y), отримуємо

$$\widetilde{w}(\sigma)(x,y) = w(\sigma)(x,y) + \rho_0(x,y) \geq \limsup_{n\to+\infty} w(\sigma_n)(x_n,y_n) + \rho_0(x,y) =$$

$$= \limsup_{n\to+\infty} w(\sigma_n)(x_n,y_n) + \lim_{n\to+\infty} \rho_0(x_n,y_n) = \limsup_{n\to+\infty} \widetilde{w}(\sigma_n)(x_n,y_n).$$

$\square$

3.3. Продовження неперервних псевдометрик, заданих на опуклих підмножинах $\mathbb{R}^n$

Якщо Y і Z — гаусдорфові топологічні простори, то можна ввести на множині всіх неперервних функцій з Y в Z топологію Фелла, ототожнивши кожну функцію $f \in C(Y, Z)$ з її графіком, який є замкненою підмножиною простору $Y \times Z$, тобто елементом простору $\mathrm{CL}(Y \times Z)$. Така топологізація простору $C(Y, Z)$ розглядалася, зокрема, у [31].

У даному підрозділі розглянемо оператор продовження неперервних псевдометрик, побудований за допомогою метричної проекції, в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо множину $\mathrm{CL}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ опуклих замкнених підмножин простору $\mathbb{R}^n$ і множину

$$\mathcal{PM}_{\mathrm{c}} = \bigcup \{\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(C) \mid C \in \mathrm{CL}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)\}$$

неперервних часткових псевдометрик, заданих на елементах простору $\mathrm{CL}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$. Введемо топологію гіперпростору на множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$, ототожнюючи кожну псевдометрику $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$ з її графіком $\Gamma_\sigma \in (\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_F)$. Отже, простір $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$ є підпростором простору $(\mathrm{CL}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_F)$. Оператор $w\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$, заданий формулою

$$w(\sigma)(x, y) = \sigma\big(s(\mathrm{dom}(\sigma), x), s(\mathrm{dom}(\sigma), y)\big),\ \ x, y \in \mathbb{R}^n,$$

очевидно продовжує неперервні псевдометрики з $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$ до неперервних псевдометрик, заданих на просторі $\mathbb{R}^n$.

Твердження 3.6. *Відображення $w\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^n)$ неперервне.*

Доведення. Нехай $\{\sigma_i\}$ — послідовність у просторі $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$, яка збігається до $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$. Позначимо $\mathrm{dom}(\sigma_i) = B_i$, $i \in \mathbb{N}$ і $\mathrm{dom}(\sigma) = B$.

Нехай d — стандартна метрика на множині $\mathbb{R}^n$. Зафіксуємо довільну компактну підмножину K простору $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ і доведемо, що виконуються умови

$$\lim_{i\to+\infty} e_d(\Gamma_{w(\sigma)} \cap K, \Gamma_{w(\sigma_i)}) = 0 \ \text{ і } \ \lim_{i\to+\infty} e_d(\Gamma_{w(\sigma_i)} \cap K, \Gamma_{w(\sigma)}) = 0.$$

Нехай $K \cap \Gamma_{w(\sigma)} = K_{w(\sigma)}$ і $K \cap \Gamma_{w(\sigma_i)} = K_{w(\sigma_i)}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Можна знайти куб $K_0 = L^n \times L^n \times L$ у просторі $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ і число $j_0 \in \mathbb{N}$ такі, що для всіх $i > j_0$ отримаємо $K_{w(\sigma_i)} \subset K_0$, $L^n \cap \partial B_i \neq \varnothing$, і $K_{w(\sigma)} \subset K_0$, $L^n \cap \partial B \neq \varnothing$. Тут L — замкнений інтервал в просторі $\mathbb{R}$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ нехай $A_i = L^n \cap B_i$ і нехай $A = L^n \cap B$. Очевидно, що всі множини A_i та A є компактними підмножинами простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо звуження псевдометрик σ_i на $A_i \times A_i$ для кожного $i > j_0$ та псевдометрики σ на множину $A \times A$. Оскільки $\sigma_i \to \sigma$, отримаємо $A_i \to A$. Нехай $\widetilde{\sigma}$ — неперервне продовження псевдометрики σ на множину $L^n \times L^n$. Наприклад, можна взяти $\widetilde{\sigma} = w(\sigma)|_{L^n \times L^n}$. Позначимо через $\widetilde{\sigma}_i$ звуження псевдометрики $\widetilde{\sigma}$ на простір $A_i \times A_i$. Оскільки $A_i \to A$, отримаємо $\widetilde{\sigma}_i \to \sigma$. Отже,

$$\max_{x,y\in A_i} |\sigma_i(x,y) - \widetilde{\sigma}(x,y)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Оскільки множина $L^n \times L^n$ компактна, то відображення $\widetilde{\sigma}$ рівномірно неперервне на $L^n \times L^n$. Зрозуміло, що якщо $(x,y) \in L^n \times L^n$, то $(s(B)(x), s(B)(y)) \in A \times A$ і $(s(B_i)(x), s(B_i)(y)) \in A_i \times A_i$ для кожного $i > j_0$. Оскільки $A_i \to A$, отримаємо $s(B_i, x) \to s(B, x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}^n$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Можна знайти індекс $k \in \mathbb{N}$ такий, що для кожного $i > k$ матимемо

$$\max_{x,y\in A_i} |\sigma_i(x,y) - \widetilde{\sigma}(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

і

$$|\sigma(s(B,x), s(B,y)) - \widetilde{\sigma}(s(B_i,x), s(B_i,y))| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $(x, y) \in L^n \times L^n$. Отже,

$$|w(\sigma)(x, y) - w(\sigma_i)(x, y)| =$$

$$= |\sigma(s(B, x), s(B, y)) - \sigma_i(s(B_i, x), s(B_i, y))| \leq$$

$$\leq |\sigma(s(B, x), s(B, y)) - \widetilde{\sigma}(s(B_i, x), s(B_i, y))| +$$

$$+ |\widetilde{\sigma}(s(B_i, x), s(B_i, y)) - \sigma_i(s(B_i, x), s(B_i, y))| < \varepsilon.$$

Таким чином, $e_d(K_{w(\sigma)}, \Gamma_{\sigma_i}) \to 0$ і $e_d(K_{w(\sigma_i)}, \Gamma_\sigma) \to 0$ при $i \to \infty$.

$\square$

3.4. Продовження ліпшицевих (псевдо)метрик

У даному підрозділі розглянемо задачу продовження ліпшицевих (псевдо)метрик, визначених на замкнених опуклих підмножинах метризовного локально опуклого топологічного простору.

Нехай X — компактний метризовний локально опуклий топологічний простір і нехай A — довільна замкнена опукла підмножина простору X. Зафіксуємо метрику d, яка породжує топологію простору X. Нагадаємо поняття ліпшицевої (псевдо)метрики.

Означення 3.1. *(Псевдо)метрика ρ, визначена на метричному просторі (Y, d), називається ліпшицевою, якщо існує число $c > 0$ таке, що $\rho(x, y) \le cd(x, y)$ для довільних $x, y \in Y$.*

Розглянемо множини $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ та $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$ ліпшицевих псевдометрик, визначених відповідно на A та X. На множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ можна ввести норму $\|\cdot\|_A$, прийнявши

$$\|\sigma\|_A = \sup\left\{\frac{\sigma(x, y)}{d(x, y)} : x, y \in A,\ x \neq y\right\}.$$

Аналогічно для $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$.

Будемо називати відображення $u\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$ лінійним оператором продовження ліпшицевих псевдометрик, якщо воно задовольняє наступні умови:

1) u — лінійний оператор, тобто $u(\sigma_1 + \sigma_2) = u(\sigma_1) + u(\sigma)_2$ та $u(t\sigma) = tu(\sigma)$ для довільних $\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$, $t \ge 0$;

2) $u(\sigma)|_{A \times A} = \sigma$ для довільного $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$;

3) u — неперервне відображення, тобто

$$\|u\| = \sup\{\|u(\sigma)\|_X : \|\sigma\|_A \le 1,\ \sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)\} < +\infty.$$

Теорема 3.3. *Відображення* $u\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$, *визначене формулою*

$$u(\sigma)(x,y) = \sigma(s(A,x), s(A,y)),\ \sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A),\ x,y \in X$$

є лінійним оператором продовження ліпшицевих псевдометрик. Крім цього, оператор u *є неперервним у топологіях рівномірної та поточкової збіжності на множинах* $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ *та* $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$.

Доведення. Неважко переконатися, що $u(\sigma) \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$ для довільної псевдометрики $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$. Справді, нехай c — ліпшицева константа для σ. Відомо, що метрична проекція на довільну замкнену опуклу підмножину гільбертового простору є ліпшицевою функцією з ліпшицевою константою 1. Оскільки простір X можна розглядати як підпростір гільбертового простору l_2, то

$$d(s(A,x), s(A,y)) \le d(x,y)$$

для довільних $x,y \in X$. Тоді для будь-яких $x,y \in X$ отримаємо

$$u(\sigma)(x,y) = \sigma(s(A,x), s(A,y)) \le cd(s(A,x), s(A,y)) \le cd(x,y).$$

Отже, $u(\sigma)$ є ліпшицевою псевдометрикою на X з тією ж ліпшицевою константою, що і σ.

Для довільних $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$, $t \ge 0$ та $x,y \in X$ маємо

$$u(\sigma_1 + \sigma_2)(x,y) = \sigma_1(s(A,x), s(A,y)) + \sigma_2(s(A,x), s(A,y)) =$$

$$= u(\sigma_1)(x,y) + u(\sigma_2)(x,y),$$

$$u(t\sigma)(x,y) = t\sigma(s(A,x), s(A,y)) = tu(\sigma)(x,y).$$

Доведемо, що відображення u неперервне відносно ліпшицевої топології. Оскільки оператор u зберігає ліпшицеві константи псевдометрик, то

$$\|u\| = \sup\{\|u(\sigma)\|_X : \|\sigma\|_A \le 1\} = 1.$$

Отже, u — лінійний оператор продовження ліпшицевих псевдометрик.

Тепер припустимо, що на множинах $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ та $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$ задана топологія рівномірної збіжності. Нехай $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність в $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$, яка рівномірно збігається до $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що для довільних $i > N(\varepsilon)$ та $x, y \in A$ виконується нерівність $|\sigma_i(x,y) - \sigma(x,y)| < \varepsilon$. Тоді

$$|u(\sigma_i)(x,y) - u(\sigma)(x,y)| =$$

$$= |\sigma_i(s(A,x), s(A,y)) - \sigma(s(A,x), s(A,y))| < \varepsilon$$

для довільних $i > N(\varepsilon)$ та $x, y \in X$.

Тепер введемо топологію поточкової збіжності на множинах $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ та $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$. Нехай $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — довільна напрямленість в $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$, яка поточково збігається до $\sigma \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$. Тоді для довільних $x, y \in X$ отримаємо

$$u(\sigma_\lambda)(x,y) = \sigma_\lambda(s(A,x), s(A,y)) \to \sigma(s(A,x), s(A,y)) = u(\sigma)(x,y).$$

$\square$

Розглянемо задачу одночасного продовження ліпшицевих псевдометрик, заданих на замкнених опуклих підмножинах простору X. Нехай

$$\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}} = \bigcup\{\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A) : A \in \mathrm{cc}(X)\} \text{ —}$$

множина часткових ліпшицевих псевдометрик.

Теорема 3.4. *Існує відображення $u\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$, яке має наступні властивості для довільних $a, b \geq 0$, $\sigma, \sigma' \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}$:*

1) $u(\sigma)$ — продовження псевдометрики σ на простір X;

2) $u(a\sigma + b\sigma_1) = au(\sigma) + bu(\sigma_1)$*;*

3) оператор u зберігає ліпшицеву константу;

4) звуження $u|_{\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)\times\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)}$ неперервне в топологіях поточкової та рівномірної збіжності, а також в ліпшицевій топології на множинах $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(A)$ та $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(X)$ для кожної множини $A \in \mathrm{cc}(X)$;

Доведення. Нехай $u(\rho)(x, y) = \rho(s(\mathrm{dom}\ \rho, x), s(\mathrm{dom}\ \rho, y))$ для довільних $\rho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}$, $x, y \in X$. Тоді виконання умов 1), 2), 3) та 4) випливає з теореми 3.3. $\square$

Наступне твердження належить М. М. Зарічному і стосується лінійних операторів продовження ліпшицевих (псевдо)метрик, визначених на замкненій підмножині довільного компактного метричного простору.

Твердження 3.7. *Нехай B — замкнена підмножина компактного метричного простору (Y, d) така, що $|B| \geq 2$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1) існує неперервний лінійний оператор продовження, що діє з множини $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(B)$ в множину $\mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(Y)$;

2) існує неперервний лінійний оператор продовження, що діє з множини $\mathcal{M}_{\mathrm{lip}}(B)$ в множину $\mathcal{M}_{\mathrm{lip}}(Y)$;

Доведення. Спочатку доведемо, що з умови 1) випливає 2). Нехай $u\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(B) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(Y)$ — неперервний лінійний оператор продовження.

Переконаємося, що існує псевдометрика $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{PM}_{\mathrm{lip}}(Y)$ така, що $\widetilde{\sigma}(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $(x, y) \in (B \times B) \cup \Delta_Y$. Для довільних $x, y \in Y \setminus B$ таких, що $x \neq y$, розглянемо псевдометрику σ_{xy} на множині $B \cup \{x, y\}$, означену так

$$\sigma_{xy}|(B \times B) = 0,\ \sigma_{xy}(x, y) = \sigma_{xy}(x, b) = \sigma_{xy}(y, b) = 1$$

для довільного $b \in B$. Тоді для довільного $b \in B$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, y) &= 1 = (1/d(x, y))d(x, y), \\ \sigma_{xy}(x, b) &= 1 \leq (1/d(x, B))d(x, b), \\ \sigma_{xy}(y, b) &= 1 \leq (1/d(y, B))d(y, b). \end{aligned}$$

Отже, σ_{xy} — ліпшицева псевдометрика на підпросторі $B \cup \{x, y\}$ простору Y з ліпшицевою константою

$$\max\{1/d(x, y), 1/d(x, B), 1/d(y, B)\}.$$

З результату Лууккайнена [37] випливає існування ліпшицевого продовження $\widetilde{\sigma}_{xy}$ псевдометрики σ_{xy}.

Можна вибрати неперетинні околи U_{xy} та V_{xy} точок x та y відповідно такі, що $\widetilde{\sigma}_{xy}(x', y') \neq 0$ для довільних $x' \in U_{xy}$ та $y' \in V_{xy}$. Тоді сім'я

$$\{U_{xy} \times V_{xy} : x, y \in ((Y \setminus B) \times (Y \setminus B)) \setminus \Delta_Y\}$$

утворює відкрите покриття простору $((Y \setminus B) \times (Y \setminus B)) \setminus \Delta_Y$. Оскільки цей простір сепарабельний, то існує послідовність (x_i, y_i) в $((Y \setminus B) \times (Y \setminus B)) \setminus \Delta_Y$ така, що

$$\bigcup\{U_{x_iy_i} \times V_{x_iy_i} : i \in \mathbb{N}\} = ((Y \setminus B) \times (Y \setminus B)) \setminus \Delta_Y.$$

Означимо псевдометрику $\widetilde{\sigma}$ формулою

$$\widetilde{\sigma}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\sigma}_{x_iy_i}(x, y)}{2^i \|\widetilde{\sigma}_{x_iy_i}\|_Y}\ ,\ x, y \in Y.$$

Легко бачити, що псевдометрика $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{PM}_{\text{lip}}(Y)$ володіє потрібними властивостями.

Тепер означимо оператор продовження $\widetilde{u}\colon \mathcal{M}_{\text{lip}}(B) \to \mathcal{M}_{\text{lip}}(Y)$. Зафіксуємо довільні елементи $x_0, y_0 \in B$, $x_0 \neq y_0$ і приймемо $\widetilde{u}(\rho) = u(\rho) + \rho(x_0, y_0)\widetilde{\sigma}$ для будь-якої метрики $\rho \in \mathcal{M}_{\text{lip}}(B)$.

Доведемо, що з умови (2) випливає (1). Переконаємося, що множина $\mathcal{M}_{\text{lip}}(B)$ всюди щільна в просторі $\mathcal{PM}_{\text{lip}}(B)$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Для довільної псевдометрики $\varrho \in \mathcal{PM}_{\text{lip}}(B)$ функція $\varrho_1 = \varrho + \varepsilon d|_{B\times B}$ є елементом множини $\mathcal{M}_{\text{lip}}(B)$ таким, що $\|\varrho - \varrho_1\| \leq \varepsilon$.

Нехай $u\colon \mathcal{M}_{\text{lip}}(B) \to \mathcal{M}_{\text{lip}}(Y)$ — неперервний лінійний оператор продовження. Оскільки множина $\mathcal{M}_{\text{lip}}(B)$ всюди щільна в просторі $\mathcal{PM}_{\text{lip}}(B)$, а простір $\mathcal{PM}_{\text{lip}}(Y)$ повний, то існує продовження $\widetilde{u}\colon \mathcal{PM}_{\text{lip}}(B) \to \mathcal{PM}_{\text{lip}}(Y)$ відображення u. $\square$

3.5. Лінійний оператор одночасного продовження псевдометрик, заданих на опуклих тілах в $\mathbb{R}^n$

Нещодавно Е. Д. Тимчатин та М. М. Зарічний розглядали задачу одночасного продовження часткових неперервних псевдометрик, заданих на замкнених підмножинах компактного метризовного топологічного простору (див. [62]). Для множини часткових псевдометрик з топологією В'єторіса доведене існування лінійного неперервного оператора одночасного продовження псевдометрик. Оператор продовження побудований авторами за допомогою теореми Фришковського про неперервну селекцію для багатозначних відображень (див. [26]). У даному підрозділі ми розглянемо задачу одночасного продовження неперервних псевдометрик, заданих на деякому класі замкнених підмножин евклідового простору $\mathbb{R}^n$, а саме, на множині опуклих тіл. Будемо використовувати теорему про селекцію Брессана та Коломбо, яка є аналогом результату Фришковського для некомпактного випадку.

Нехай Y — деякий топологічний простір. Для довільної замкненої підмножини A простору Y розглянемо множину $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ ($\mathcal{M}_{\mathrm{c}}(A)$) всіх неперервних псевдометрик (відповідно метрик), заданих на множині A. Зрозуміло, що множина $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ ($\mathcal{M}_{\mathrm{c}}(A)$) замкнена відносно операції поточкового додавання псевдометрик

$$q\colon \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A) \times \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$$

і множення на невід'ємне число

$$c : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$$

для кожного $A \in \mathrm{CL}(Y)$. Введемо топологію на множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ наступним чином. Кожну псевдометрику σ з $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ можна ототожнити з її графіком

$$\Gamma_\sigma = \{(x,y,t) \in A \times A \times \mathbb{R}_+ : t = \sigma(x,y)\} \in \mathrm{CL}(Y \times Y \times \mathbb{R}).$$

Будемо розглядати множину часткових псевдометрик

$$\mathcal{PM}_\mathrm{c} = \bigcup \{\mathcal{PM}_\mathrm{c}(A) : A \in \mathrm{CL}(Y)\}$$

як підпростір простору $(\mathrm{CL}(Y \times Y \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_F)$.

Тоді кожну відкриту множину в просторі $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ можна подати у вигляді:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \left[\left(\bigcap_{i=1}^{k} [A, U_i, a_i, b_i]^- \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} [A, K_j, c_j, d_j]^+ \right) \right],$$

де $\mathcal{A} \subset \mathrm{CL}(Y)$ — довільна множина елементів простору $\mathrm{CL}(Y)$.

Нехай $X = \mathbb{R}^n$ — евклідовий простір зі стандартною нормою, що породжує стандартну метрику d на X. Нехай $S(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ та $\overline{S}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ — відповідно відкрита та замкнена куля радіуса ε з центром в точці $x \in X$. Позначимо через $\mathrm{CL}_1(X)$ підмножину простору $\mathrm{CL}(X)$, означену наступним чином:

$$\mathrm{CL}_1(X) = \left\{ \overline{A} \subset X : A \text{ — відкрита і опукла в } X \right\}.$$

Нехай $\mathcal{PM}'_\mathrm{c} = \bigcup \{\mathcal{PM}_\mathrm{c}(A) : A \in \mathrm{CL}_1(X)\}$. Розглядатимемо $\mathcal{PM}'_\mathrm{c}$ як підпростір простору $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ неперервних псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах простору X.

Означимо багатозначне відображення

$$G \colon X \times \mathrm{CL}_1(X) \to \mathcal{Q}(L^1([0,1], X))$$

формулою

$$G(x,A) = \begin{cases} L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A))), & \text{якщо } x \notin A, \\ L^1([0,1], \{x\}) \equiv \{x\}, & \text{якщо } x \in A. \end{cases}$$

Значеннями оператора G є замкнені розкладні множини. Справді, цей факт є очевидним для $\{x\} \equiv L^1([0,1],\{x\})$. Для довільних $x \in X \setminus A$, $u_1, u_2 \in L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A)))$ та $C \subset [0,1]$ отримуємо $u_1\chi(C) + u_2\chi([0,T] \setminus C) \in L^1([0,1], A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A)))$.

Твердження 3.8. *Багатозначне відображення G є напівнеперервним знизу.*

Доведення. Доведемо, що для довільної відкритої підмножини V простору $L^1([0,1],X)$ множина

$$V^* = \{(x,A) \in X \times \mathrm{CL}_1(X) : G(x,A) \cap V \neq \varnothing\}$$

відкрита в просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Зафіксуємо довільний елемент $(x_0, A_0) \in V^*$ і розглянемо два випадки.

1) Нехай $x_0 \notin A_0$. Для зручності позначимо $O(x,A) = A \cap \overline{S}(x, 2d(x,A))$ для довільних $A \in \mathrm{CL}_1(X)$ та $x \in X \setminus A$. Тоді $G(x_0,A_0) = L^1([0,1], O(x_0,A_0))$. Оскільки $G(x_0,A_0) \cap V \neq \varnothing$, то існує функція $u \in G(x_0,A_0) \cap V$ та число $\varepsilon > 0$ такі, що $\{v \in L^1([0,1],X) : \|u - v\| < \varepsilon\} \subset V$. Виберемо число ε меншим, ніж $d(x_0,A_0)/8$. Можна знайти функцію $v \in L^1([0,1], O(x_0,A_0))$, яка набуває скінченну кількість значень, таку, що $\|u - v\| < \varepsilon/2$. Оскільки множина $O(x_0,A_0)$ опукла і внутрішність $\operatorname{int} O(x_0,A_0)$ непорожня, то можемо вважати, що всі значення функції v містяться у множині $S(x_0, 2d(x_0,A_0)) \cap A_0$. Нехай $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множина значень функції v. Виберемо довільне додатнє число $\delta < \varepsilon$ таке, що $S(x_i, \delta/2) \subset S(x_0, 2d(x_0,A_0))$ для всіх $i \in \{1, \ldots, k\}$. Крім цього, нехай δ — достатньо мале, щоб виконувалась нерівність $d(x_0, x_i) < 2d(x_0,A_0) - 3\delta$. Очевидно, що $S(x_i, \delta/2) \cap A_0 \neq \varnothing$ для всіх $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тепер нехай $U = S(x_0, \delta/2)$ і

$$W = \left[\bigcap_{i=1}^{k} S\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right)^{-}\right] \cap \left[\overline{S}\left(x_0, d(x_0,A_0) - \frac{\delta}{2}\right)^{c}\right]^{+}.$$

Тоді множина $U \times W$ є околом точки (x_0, A_0) у просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Візьмемо довільну точку $(x, A) \in U \times W$. Тоді для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ існує точка $z_i \in S(x_i, \delta/2) \cap A$. Крім цього, $d(x, A) > d(x_0, A_0) - \delta$. Справді, якщо $y_0 \in A_0$ та $y \in A$ — точки такі, що $d(x_0, A_0) = d(x_0, y_0)$ і $d(x, A) = d(x, y)$, то отримаємо

$$d(x, A) = d(x, y) \geq d(x_0, y) - d(x_0, x) > d(x_0, A) - \delta/2 >$$
$$> d(x_0, A_0) - \delta/2 - \delta/2 = d(x_0, A_0) - \delta > 0.$$

Отже, $x \notin A$ і тому $G(x, A) = L^1([0, 1], O(x, A))$. Тепер доведемо, що $d(x, z_i) < 2d(x, A)$ для кожного індекса $i \in \{1, \dots, k\}$. Отримаємо

$$d(x, z_i) \leq d(x, x_i) + d(x_i, z_i) < d(x, x_i) + \frac{\delta}{2} \leq d(x, x_0) + d(x_0, x_i) +$$
$$+ \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + d(x_0, x_i) + \frac{\delta}{2} = d(x_0, x_i) + \delta < 2d(x_0, A_0) - 2\delta < 2d(x, A)$$

для довільного $i \in \{1, \dots, k\}$. Отже, $z_i \in O(x, A)$ для будь-якого $i \in \{1, \dots, k\}$. Означимо функцію $v' \in L^1([0, 1], O(x, A))$ наступним чином. Нехай $v'(t) = z_i$ для всіх $t \in [0, 1]$ таких, що $v(t) = x_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Тоді $\|v' - v\| < \delta/2 < \varepsilon/2$. Отже, $\|u - v'\| \leq \|u - v\| + \|v - v'\| < \varepsilon$ і ми отримуємо $v' \in G(x, A) \cap V$.

2) Нехай $x_0 \in A_0$. Тоді $G(x_0, A_0) = u_0 \in V$, де $u_0(t) = x_0$ для всіх $t \in [0, 1]$. Виберемо число $\varepsilon > 0$ таке, що $\{v \in L^1([0, 1], X) : \|u_0 - v\| < \varepsilon\} \subset V$. Нехай $U = S(x_0, \varepsilon/3)$ і $W = S(x_0, \varepsilon/3)^-$. Очевидно, що множина $U \times W$ є околом точки (x_0, A_0) у просторі $X \times \mathrm{CL}_1(X)$. Зафіксуємо довільну точку $(x, A) \in U \times W$. Якщо $x \in A$, то $G(x, A) = u$, де $u(t) = x$ на множині $[0, 1]$. Оскільки $\|u - u_0\| < \varepsilon$, то отримаємо $u \in V \cap G(x, A)$. Тепер припустимо, що $x \notin A$. Оскільки $A \cap S(x_0, \varepsilon/3) \neq \varnothing$, бачимо, що $d(x, A) < 2\varepsilon/3$. Отже, існує точка $y \in A$ така, що $d(x, y) = d(x, A) < 2\varepsilon/3$. Тоді для сталої функції $v \in L^1([0, 1], O(x, A))$ з єдиним значенням y

отримаємо $\|v-u_0\| \le \|v-u\|+\|u-u_0\| < 2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$, а отже, $v \in V$.

$\square$

За теоремою 2.1 існує неперервна селекція $g\colon X \times \mathrm{CL}_1(X) \to L^1([0,1],X)$ багатозначного відображення G. Означимо оператор $h\colon \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}} \to \mathbb{R}^{X\times X}$ наступною формулою

$$h(\sigma)(x,y)=\int_0^1 \sigma(g(x,\mathrm{dom}(\sigma))(t), g(y,\mathrm{dom}(\sigma))(t))dt$$

для всіх $x,y \in X$. Оскільки для довільних елементів $x,y \in X$ функції $g(x,\mathrm{dom}(\sigma))$ та $g(y,\mathrm{dom}(\sigma))$ набувають свої значення у компактних підмножинах множини $\mathrm{dom}(\sigma)$, бачимо, що $h(\sigma)(x,y) < +\infty$.

Наступні два твердження є аналогами допоміжних результатів, отриманих у [62].

Твердження 3.9. *Нехай $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ і K — компактна підмножина простору* $\mathrm{dom}(\sigma)$. *Тоді для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $\int_0^1 \sigma(u(t),v(t))dt < \varepsilon$, де функції $u,v \in L^1([0,1],K)$ такі, що $\|u-v\|<\delta$.*

Доведення. Якщо $\sigma(x,y)=0$ для всіх $x,y \in K \subset \mathrm{dom}(\sigma)$, то твердження очевидне. Припустимо, що $q=\max\{\sigma(x,y) : (x,y) \in K\times K\} > 0$ і нехай число $\varepsilon>0$ — фіксоване. Оскільки псевдометрика σ рівномірно неперервна на множині $K \times K$, то існує $\delta_0>0$ таке, що $\sigma(x,y)<\varepsilon/2$ для всіх $x,y \in K$ таких, що $\|x-y\|<\delta_0$. Тепер виберемо довільне додатне число $\delta < \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon\delta_0}{2q}\}$. Розглянемо довільні елементи $u,v \in L^1([0,1],K)$ такі, що $\|u-v\|<\delta$ і множину

$$C=\{t \in [0,1] : \|u(t)-v(t)\| \ge \delta_0\}.$$

Доведемо, що $\mu(C) \le \frac{\varepsilon}{2q}$ (тут через μ позначаємо лебегову міру на інтервалі $[0,1]$). Припустимо, що має місце протилежне. Тоді

$$\delta > \int_C \|u(t)-v(t)\|dt + \int_{[0,1]\setminus C} \|u(t)-v(t)\|dt \geq$$

$$\geq \mu(C)\delta_0 > \frac{\varepsilon\delta_0}{2q},$$

суперечність. Отже,

$$\int_0^1 \sigma(u(t),v(t))dt = \int_C \sigma(u(t),v(t))dt + \int_{[0,1]\setminus C} \sigma(u(t),v(t))dt <$$

$$< \frac{\varepsilon q}{2q} + \int_{[0,1]\setminus C} \frac{\varepsilon}{2} dt \leq \varepsilon.$$

$\square$

Твердження 3.10. *Нехай* $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ *і* K *— компактна підмножина простору* $\mathrm{dom}(\sigma)$*. Тоді відображення*

$$r_\sigma \colon L^1([0,1],K) \times L^1([0,1],K) \to \mathbb{R},$$

визначене формулою

$$r_\sigma(u,v) = \int_0^1 \sigma(u(t),v(t))dt,$$

рівномірно неперервне.

Доведення. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. За попереднім твердженням можна знайти число $\delta > 0$ таке, що для довільних $u, v \in L^1([0,1],K)$, для яких $\|u-v\| < \delta$, виконується нерівність $r_\sigma(u,v) < \varepsilon/2$. Виберемо функції $u_1, v_1, u_2, v_2 \in L^1([0,1],K)$ такі, що $\|u_1 - u_2\| < \delta$ і $\|v_1 - v_2\| < \delta$. Отримаємо

$$|r_\sigma(u_1,v_1) - r_\sigma(u_2,v_2)| = \left| \int_0^1 (\sigma(u_1(t),v_1(t)) - \sigma(u_2(t),v_2(t)))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |\sigma(u_1(t),v_1(t)) - \sigma(u_1(t),v_2(t))|\, dt +$$

$$+\int_0^1 |\sigma(u_1(t), v_2(t)) - \sigma(u_2(t), v_2(t))|\,dt \le$$

$$\le \int_0^1 \sigma\left(v_1(t), v_2(t)\right)dt + \int_0^1 \sigma\left(u_1(t), u_2(t)\right)dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Твердження 3.11. *Нехай $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$. Тоді функція $h(\sigma)$ — неперервна псевдометрика на X.*

Доведення. Очевидно, що $h(\sigma)$ — псевдометрика на X. Для доведення неперервності $h(\sigma)$ візьмемо довільні послідовності $\{x_i\}$ та $\{y_i\}$ в X, збіжні до точок x та y відповідно. Нехай W_1 та W_2 — обмежені околи точок x та y відповідно. За властивостями селекції g можна знайти компактні підмножини K_1 та K_2 простору $\mathrm{dom}(\sigma)$ такі, що $g(x', \mathrm{dom}(\sigma)) \in L^1([0,1], K_1)$ для будь-якого $x' \in W_1$ і $g(y', \mathrm{dom}(\sigma)) \in L^1([0,1], K_2)$ для будь-якого $y' \in W_2$. Тоді за твердженням 3.10 для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що $|r_\sigma(u_1, v_1) - r_\sigma(u_2, v_2)| < \varepsilon$, якщо $\|u_1 - u_2\| < \delta$ і $\|v_1 - v_2\| < \delta$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in L^1([0,1], K_1 \cup K_2)$. Оскільки функція g неперервна, то можна знайти натуральне число k таке, що для всіх $n > k$ отримаємо $x_n \in W_1$, $y_n \in W_2$, $\|g(x_n, \mathrm{dom}(\sigma)) - g(x, \mathrm{dom}(\sigma))\| < \delta$ і $\|g(y_n, \mathrm{dom}(\sigma)) - g(y, \mathrm{dom}(\sigma))\| < \delta$. Отже, $|h(\sigma)(x_n, y_n) - h(\sigma)(x, y)| < \varepsilon$ для всіх $n > k$. □

Твердження 3.12. *Оператор h продовжує псевдометрики з $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ на простір X.*

Доведення. Твердження випливає з властивостей селекції g. Якщо $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ і $x, y \in \mathrm{dom}(\sigma)$, то $g(x, \mathrm{dom}(\sigma)) = x$ і $g(y, \mathrm{dom}(\sigma)) = y$. Отже, $h(\sigma)(x, y) = \sigma(x, y)$. □

Твердження 3.13. *Для довільних псевдометрик $\sigma, \sigma' \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ та чисел $\lambda, \gamma \ge 0$ виконується умова $h(\lambda\sigma + \gamma\sigma') = \lambda h(\sigma) + \gamma h(\sigma')$.*

Доведення. Твердження очевидно випливає з побудови оператора h. $\square$

Твердження 3.14. *Оператор h неперервний.*

Доведення. Нехай K — довільна компактна підмножина простору $X \times X$ і нехай a, b — довільні дійсні числа такі, що $a < b$. Оскільки простір X локально компактний і зв'язний, то топологія Фелла на множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ рівна компактно-відкритій топології на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ (див. [31]). Тому достатньо довести, що прообраз елемента передбази топології $\mathcal{T}_{co}$ на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ вигляду $M(K, a, b) = \{\rho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X) : \rho(K) \subset (a, b)\}$ відкритий у просторі $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$. Нехай $\sigma \in h^{-1}(M(K, a, b))$ і $B = \mathrm{dom}(\sigma)$. Тоді $h(\sigma) \in M(K, a, b)$ і можна знайти число $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $(x, y) \in K$ отримаємо $a < h(\sigma)(x, y) - \varepsilon/2 < h(\sigma)(x, y) + \varepsilon/2 < b$. Потрібно знайти окіл O псевдометрики σ в $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ такий, що $\sigma \in O \subset h^{-1}(M(K, a, b))$. Оскільки простір B локально компактний і зв'язний, отримаємо $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_{co}$ на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B)$.

Існують замкнені кулі C_1 та C_2 в X такі, що для довільних $(x, y) \in K$ і $t \in [0, 1]$ матимемо

$$(g(x, B)(t), g(y, B)(t)) \in (B \cap C_1) \times (B \cap C_2) \equiv K_1 \times K_2.$$

Тоді $K_1 \times K_2$ — компактна підмножина простору $B \times B$. Позначимо через q та Q відповідно найменше та найбільше значення псевдометрики σ на множині $K_1 \times K_2$. Тепер означимо множини

$$D_1 = \left\{(x, y, z) \in K_1 \times K_2 \times \mathbb{R} : \sigma(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq Q + \varepsilon\right\}$$

і

$$D_2 = \left\{(x, y, z) \in K_1 \times K_2 \times \mathbb{R} : -\varepsilon \leq z \leq \sigma(x, y) - \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Очевидно, що D_1 і D_2 — компактні підмножини простору $B \times B \times \mathbb{R}$. Оскільки графік псевдометрики σ не перетинає ні D_1, ні D_2, бачимо, що множина $O_1 = (D_1^c)^+ \cap (D_2^c)^+$ є околом псевдометрики σ в $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B)$ у топології Фелла. Нехай

$$O_2 = \left\{\rho \in \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B) : \rho(K_1 \times K_2) \subset \left(q - \frac{\varepsilon}{2}, Q + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

Тоді множина O_2 — окіл псевдометрики σ в $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$ у компактно-відкритій топології. Оскільки топології $\mathcal{T}_F$ і $\mathcal{T}_{co}$ рівні на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B)$, то множина $O = O_1 \cap O_2$ є околом псевдометрики σ у просторі $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(B)$, а отже, у просторі $\mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$. Зафіксуємо довільний елемент $\rho \in O$. Оскільки $-\varepsilon/2 < 0 \le q \le \rho(x', y') \le Q < Q + \varepsilon/2$ для всіх (x', y'), бачимо, що єдиною можливістю, при якій графік псевдометрики ρ не перетинає ні D_1, ні D_2 є умова

$$\sigma(x', y') - \varepsilon/2 < \rho(x', y') < \sigma(x', y') + \varepsilon/2$$

для всіх $(x', y') \in K_1 \times K_2$. Тоді

$$|h(\rho)(x, y) - h(\sigma)(x, y)| \le$$

$$\le \int_0^1 |\rho(g(x, B)(t), g(y, B)(t)) - \sigma(g(x, B)(t), g(y, B)(t))|\, dt < \varepsilon$$

для всіх $(x, y) \in K$. Звідси отримаємо $h(\rho)(K) \subset (a, b)$. Твердження доведено. $\square$

Основний результат даного підрозділу можна сформулювати так.

Теорема 3.5. *Існує відображення $h\colon \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$, яке задовольняє наступні умови:*

1) h лінійне;

2) $h(\sigma)$ є продовженням псевдометрики σ на простір X для кожного $\sigma \in \mathcal{PM}'_{\mathrm{c}}$;

3) h — неперервне відображення.

3.6. Висновки

У даному розділі побудовано та встановлено властивості неперервних лінійних операторів продовження неперервних, напівнеперервних зверху та ліпшицевих (псевдо)метрик, визначених на замкнених опуклих підмножинах локально опуклих топологічних просторів. При цьому множини часткових (псевдо)метрик розглянуто у топологіях Фелла, ліпшицевій топології, а також топологіях рівномірної та поточкової збіжності.

РОЗДІЛ 4

ОДНОРІДНІ ОПЕРАТОРИ ОДНОЧАСНОГО ПРОДОВЖЕННЯ УЛЬТРАМЕТРИК

У [63] Е. Д. Тимчатином та М. М. Зарічним роглянута задача одночасного продовження часткових ультраметрик, заданих на непорожніх замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного простору X. Побудований оператор продовження неперервний, зберігає вимір Асуада ультраметричного простору та операцію взяття поточкового максимуму двох ультраметрик зі спільною областю визначення, але не є однорідним. Даний розділ присвячено побудові однорідних операторів продовження часткових ультраметрик. Основним результатом розділу є теорема, яка стверджує існування однорідного оператора, що має всі властивості конструкції Е. Д. Тимчатина-М. М. Зарічного. У даному розділі розглянуто також задачу одночасного продовження рівномірно незв'язних метрик.

4.1. Однорідний оператор одночасного продовження ультраметрик, неперервний в топології В'єторіса

У цьому підрозділі вводится конструкція однорідного оператора одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених на компактних підмножинах нульвимірного метризовного компактного топологічного простору. Нагадаємо, що метрика ρ на множині Y називається ультраметрикою, якщо

$$\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$$

для довільних $x, y, z \in Y$. Відомо, що для метризовного простору X існує ультраметрика, яка породжує вихідну топологію на X тоді і лише тоді, коли $\dim X = 0$ (див. [17]). Останнє означає існування в просторі X бази його топології, що складається з відкрито-замкнених множин. Нехай X — нульвимірний компактний метризовний топологічний простір. Розглянемо множину $\exp X$ усіх непорожніх компактних підмножин простору X, наділену топологією В'єторіса.

Для непорожньої компактної підмножини A простору X розглянемо множину $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ всіх неперервних ультраметрик, визначених на A і множину часткових ультраметрик

$$\mathcal{UM}_{\mathrm{c}} = \bigcup\{\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) : A \in \exp X,\ |A| \geq 2\},$$

визначених на елементах множини $\exp X$ (накладаємо умову на потужність області визначення для уникнення тривіальних випадків). Припустимо, що кожна ультраметрика $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ ототожнюється зі своїм графіком $\Gamma_\rho \in \exp(X \times X \times \mathbb{R})$. Для довільного $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ норма ультраметрики ρ визначається як

$$\|\rho\| = \max\{\rho(x, y) : x, y \in \mathrm{dom}(\rho)\}.$$

Для довільної множини $A \in \exp X$ множина $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ замкнена відносно операції взяття поточкового максимуму,

$$\max\colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) \times \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A).$$

Отже, $\max\{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \wedge \rho_2 \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ для довільних $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$. Для будь-яких $c \in \mathbb{R}_+$, $A \in \exp X$ і $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ маємо $c\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.1. *Існує оператор $u\colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$, який має наступні властивості для довільних $\rho, \sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$:*

1) $\|u(\rho)\| = \|\rho\|$;

2) *ультраметрика* $u(\rho)$ *є продовженням ультраметрики* ρ;

3) $u(\rho \wedge \sigma) = u(\rho) \wedge u(\sigma)$ *і* $u(c\rho) = cu(\rho)$ *у випадку, коли* $\mathrm{dom}(\rho) = \mathrm{dom}(\sigma)$ *і* $c > 0$;

4) u *— неперервне відображення.*

Доведення. Розглянемо багатозначне відображення

$$G\colon X \times \exp X \to X,$$

означене так:

$$G(z, B) = \begin{cases} B, & \text{якщо} \;\; z \notin B, \\ \{z\}, & \text{якщо} \;\; z \in B. \end{cases}$$

У [63] доведено, що відображення G є напівнеперервним знизу.

Зафіксуємо множину $A \in \exp X$ таку, що $|A| \geq 2$ і точку $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. Виберемо довільні точки $a_x, a_y \in A$ такі, що $a_x \neq a_y$ і $a_x = x$ ($a_y = y$) тоді і лише тоді, коли $x \in A$ ($y \in A$). Тепер означимо багатозначне відображення $F_{(x,y,A)}\colon X \times \exp X \to X$ за формулою

$$F_{(x,y,A)}(z, B) = \begin{cases} B, & \text{якщо} \;\; (x, A) \neq (z, B) \neq (y, A) \;\; \text{і} \;\; z \notin B, \\ \{z\}, & \text{якщо} \;\; (x, A) \neq (z, B) \neq (y, A) \;\; \text{і} \;\; z \in B, \\ \{a_x\}, & \text{якщо} \;\; (z, B) = (x, A), \\ \{a_y\}, & \text{якщо} \;\; (z, B) = (y, A). \end{cases}$$

Ми стверджуємо, що відображення $F_{(x,y,A)}$ є напівнеперервним знизу. Виберемо довільну відкриту підмножину U простору X. Оскільки G — напівнеперервне знизу відображення, то множина

$$\widetilde{U} = \{(z, B) \in X \times \exp X : G(z, B) \cap U \neq \varnothing\}$$

відкрита в $X \times \exp X$. Тоді множина

$$\{(z,B) \in X \times \exp X : F_{(x,y,A)}(z,B) \cap U \neq \varnothing\} =$$
$$= \widetilde{U} \setminus \{(z,A) : z \in \{x,y\}, a_z \notin U\}$$

відкрита в $X \times X$.

Оскільки простір X нульвимірний, то простори $\exp X$ та $X \times \exp X$ також нульвимірні (див., наприклад, [44]). Таким чином, за теоремою Майкла про селекцію для нульвимірного випадку існує неперервна селекція $f_{(x,y,A)}$ багатозначного відображення $F_{(x,y,A)}$, тобто $f_{(x,y,A)}$ є однозначним відображеням і для довільної точки $(z,B) \in X \times \exp X$ маємо $f_{(x,y,A)}(z,B) \in F_{(x,y,A)}(z,B)$. Оскільки $f_{(x,y,A)}(x,A) \neq f_{(x,y,A)}(y,A)$, то за неперервністю функції $f_{(x,y,A)}$ можна знайти околи W_A точки A у просторі $\exp X$ та $V_{(x,y)}$ точки (x,y) у просторі $X \times X$ такі, що

$$f_{(x,y,A)}(x',A') \neq f_{(x,y,A)}(y',A')$$

для довільних $A' \in W_A$ та $(x',y') \in V_{(x,y)}$. Нехай

$$K = \{(x,y,A) : A \in \exp X,\ |A| \geq 2,\ (x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X\}.$$

Тоді покриття $\mathcal{W} = \{V_{(x,y)} \times W_A : (x,y,A) \in K\}$ простору K містить зліченне підпокриття

$$\mathcal{W}' = \{V_{(x_i,y_i)} \times W_{A_i} : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

простору K. Для довільних $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ та $x, y \in X$ приймемо

$$w_i(\rho)(x,y) = \rho\left(f_{(x_i,y_i,A_i)}(x, \mathrm{dom}(\rho)), f_{(x_i,y_i,A_i)}(y, \mathrm{dom}(\rho))\right).$$

Означимо відображення $u \colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}} \to \mathbb{R}^{X \times X}$ за формулою

$$u(\rho)(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(x,y) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Доведемо, що для кожної ультраметрики $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ функція $u(\rho)$ є ультраметрикою на множині X. Очевидно, що $u(\rho)(x,y) \geq 0$ і що $u(\rho)(x,y) = u(\rho)(y,x)$ для довільних $x, y \in X$. Тепер нехай $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$. Існує число $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що

$$(x, y, \mathrm{dom}(\rho)) \in V_{(x_k,y_k)} \times W_{A_k}.$$

Оскільки

$$f_{(x_k,y_k,A_k)}(x, \mathrm{dom}(\rho)) \neq f_{(x_k,y_k,A_k)}(y, \mathrm{dom}(\rho)),$$

то отримаємо $2^{-k} w_k(\rho)(x,y) := q > 0$, а отже, $u(\rho)(x,y) > 0$. Доведемо, що відображення u означене коректно. Існує число $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що $2^{-i} < q/\|\rho\|$ для кожного $i > m$. Отже,

$$\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(x,y) \leq \frac{1}{2^i}\|\rho\| < q$$

для всіх $i > m$. Отримаємо

$$u(\rho)(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(x,y) : i \in \{0, \ldots, m\}\right\}.$$

Перевірімо виконання нерівності ультраметрики для функції $u(\rho)$. Зафіксуємо довільні точки $x, y, z \in X$. Тоді існує число $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що

$$u(\rho)(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(x,y) : i \in \{0, \ldots, j\}\right\},$$

$$u(\rho)(x,z) = \max\left\{\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(x,z) : \ i \in \{0, \ldots, j\}\right\}$$

$$\text{і} \quad u(\rho)(y,z) = \max\left\{\frac{1}{2^i} w_i(\rho)(y,z) : i \in \{0, \ldots, j\}\right\}.$$

Отже,

$$u(\rho)(x,y) \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{1}{2^i}\ \max\left\{w_i(\rho)(x,z), w_i(\rho)(y,z)\right\} : i\in\{0,\ldots,j\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho)(x,z) : i\in\{0,\ldots,j\}\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho)(y,z) : i\in\{0,\ldots,j\}\right\}\right\} =$$

$$= \max\{u(\rho)(x,z), u(\rho)(y,z)\}.$$

Ультраметрика $u(\rho)$ є неперервним відображенням на $X\times X$ як композиція неперервних відображень. Отже, $u(\rho)\in\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$ для довільної ультраметрики $\rho\in\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$.

З побудови оператора u бачимо, що $u(c\rho) = cu(\rho)$ для довільної сталої $c>0$ і що для кожної ультраметрики $\rho\in\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ виконується нерівність $\|u(\rho)\|\leq\|\rho\|$. Якщо $x,y\in\mathrm{dom}(\rho)$, то

$$f_{(x_i,y_i,A_i)}(x,A) = x \text{ і } f_{(x_i,y_i,A_i)}(y,A) = y$$

для всіх $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тому $w_i(\rho)(x,y) = \rho(x,y)$ для всіх індексів i, а отже, $u(\rho)(x,y) = \rho(x,y)$. Таким чином, ультраметрика $u(\rho)$ є продовженням ультраметрики ρ на X і $\|u(\rho)\|\geq\|\rho\|$, звідки отримуємо рівність $\|u(\rho)\| = \|\rho\|$.

Зафіксуємо довільні ультраметрики ρ_1,ρ_2 з множини $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ такі, що $\mathrm{dom}(\rho_1) = \mathrm{dom}(\rho_2) = B$ і нехай $f_{(x_i,y_i,A_i)} = f_i$ для кожного $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Для будь-якого $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ позначимо $I(l) = \{0,\ldots,l\}$. Тоді існують числа $i_1,i_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ такі, що

$$(u(\rho_1)\wedge u(\rho_2))(x,y) =$$

$$= \max\left\{\max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho_1)(x,y) : i\in I(i_1)\right\},\right.$$

$$\left.\max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho_2)(x,y) : i\in I(i_2)\right\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho_1)(x,y), \frac{1}{2^i}w_i(\rho_2)(x,y)\right\}:\right.$$

$$\left. i\in I(\max\{i_1,i_2\})\right\} = \max\left\{\max\left\{\frac{1}{2^i}\rho_1(f_i(x,B), f_i(y,B)),\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2^i}\rho_2(f_i(x,B), f_i(y,B))\right\} : i\in I(\max\{i_1,i_2\})\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{1}{2^i}\max\{\rho_1(f_i(x,B), f_i(y,B)), \rho_2(f_i(x,B), f_i(y,B))\}:\right.$$

$$\left. i\in I(\max\{i_1,i_2\})\right\} = \max\left\{\frac{1}{2^i}w_i(\rho_1\wedge\rho_2)(x,y) : i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\} =$$

$$= u(\rho_1\wedge\rho_2)(x,y).$$

Доведемо тепер неперервність відображення u. Нехай ρ_n — послідовність у просторі $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$, що збігається до $\rho\in\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$. Тоді отримаємо $\mathrm{dom}(\rho_n)\to\mathrm{dom}(\rho)$. Нехай $\rho_n = B_n$ і $\mathrm{dom}(\rho) = B$. Існує неперервна ультраметрика $\widetilde{\rho}$, задана на X, що продовжує ρ на $X\times X$ (наприклад, $\widetilde{\rho} = u(\rho)$). Нехай $\widetilde{\rho}_n = \widetilde{\rho}|_{B_n\times B_n}$. Оскільки $B_n\to B$ у просторі $\exp X$, то $\widetilde{\rho}_n\to\rho$ (див. [33], [63]). Тоді, якщо d — метрика, що породжує топологію простору X, то $d_H(\Gamma_{\rho_n}, \Gamma_{\widetilde{\rho}_n})\to 0$. Звідси отримаємо

$$\max_{x,y\in B_n}|\rho_n(x,y) - \widetilde{\rho}_n(x,y)| = \max_{x,y\in B_n}|\rho_n(x,y) - \widetilde{\rho}(x,y)| \to 0.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує число $n_0\in\mathbb{N}$ таке, що для кожного індекса $n > n_0$ матимемо

$$\frac{1}{2^i}\big|\rho(f_i(x,B), f_i(y,B)) - \widetilde{\rho}(f_i(x,B_n), f_i(y,B_n))\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{i}$$

$$\frac{1}{2^i}\max_{x,y\in B_n}|\rho_n(x,y) - \widetilde{\rho}_n(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{ii}$$

для довільних $x,y\in X$ та $i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Нерівність (i) має місце за рахунок рівномірної неперервності та обмеженості ультраметрики

$\widetilde{\rho}$, а також рівномірної неперервності відображень $\{f_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ на $X \times \exp X$. Отже,

$$\frac{1}{2^i}|w_i(\rho)(x,y) - w_i(\rho_n)(x,y)| =$$

$$= \frac{1}{2^i}\big|\rho(f_i(x,B), f_i(y,B)) - \rho_n(f_i(x,B_n), f_i(y,B_n))\big| \le$$

$$\le \frac{1}{2^i}\big|\rho(f_i(x,B), f_i(y,B)) - \widetilde{\rho}(f_i(x,B_n), f_i(y,B_n))\big| +$$

$$+ \frac{1}{2^i}\big|\widetilde{\rho}(f_i(x,B_n), f_i(y,B_n)) - \rho_n(f_i(x,B_n), f_i(y,B_n))\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всіх $x, y \in X$ та $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким чином, $|u(\rho)(x,y) - u(\rho_n)(x,y)| < \varepsilon$ для всіх індексів $n > n_0$ та $x, y \in X$, звідки отримуємо $u(\rho_n) \to u(\rho)$. $\square$

Для фіксованої множини $A \in \exp(X)$ розглянемо $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ — підпростір простору $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$, що складається з обмежених числом $T > 0$ ультраметрик, визначених на A.

Твердження 4.1. *Для кожного $A \in \exp X$, $|A| \ge 2$ звуження відображення u на підпростір $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ простору $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ є неперервним відносно топології поточкової збіжності на $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ та $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні множину $A \in \exp X$, $|A| \ge 2$, число $T > 0$ і нехай $\{\rho_s\}_{s \in S}$ — довільна напрямленість з $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$, що збігається до $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}^T(A)$ поточково на множині $A \times A$. Доведемо, що $u(\rho_s)$ поточково збігається до $u(\rho)$ на $X \times X$. Виберемо довільні $x, y \in X$, $x \ne y$. Тоді

$$u(\rho)(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2^i}\rho(f_i(x,A), f_i(y,A)) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\},$$

$$u(\rho_s)(x,y) = \max\left\{\frac{1}{2^i}\rho_s(f_i(x,A), f_i(y,A)) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\},\ s \in S.$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і доведемо, що існує індекс $s_0 \in S$ такий, що $|u(\rho)(x,y) - u(\rho_s)(x,y)| < \varepsilon$ для всіх $s \geq s_0$.

Існує натуральне число i_0 таке, що $T/2^i < \varepsilon$ при $i > i_0$. Тоді для кожного $i > i_0$ та $s \in S$ отримаємо

$$\frac{1}{2^i}\Big|\rho(f_i(x,A), f_i(y,A)) - \rho_s(f_i(x,A), f_i(y,A))\Big| \leq \frac{T}{2^i} < \varepsilon.$$

Оскільки напрямленість ρ_s поточково збігається до ρ, то існує індекс $s_0 \in S$ такий, що

$$\frac{1}{2^i}|\rho(f_i(x,A), f_i(y,A)) - \rho_s(f_i(x,A), f_i(y,A))| < \varepsilon$$

для всіх $s \geq s_0$ та $0 \leq i \leq i_0$. Зафіксуємо довільне $s \geq s_0$ і виберемо числа m, $l(s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такі, що

$$u(\rho)(x,y) = \frac{1}{2^m}\rho(f_m(x,A), f_m(y,A))$$

і

$$u(\rho_s)(x,y) = \frac{1}{2^{l(s)}}\rho_s(f_{l(s)}(x,A), f_{l(s)}(y,A)).$$

Зауважимо, що якщо a, b, c, d — невід'ємні дійсні числа такі, що $|b - c| < \varepsilon, |a - d| < \varepsilon$, $a \geq c$ і $b \geq d$, то $|a - b| < \varepsilon$. Справді, якщо $a \geq b$, то $a - b \leq a - d < \varepsilon$. Якщо ж $a < b$, то $b - a \leq b - c < \varepsilon$. Тому отримаємо $|a - b| < \varepsilon$.

Тепер нехай $a = u(\rho)(x,y)$, $b = u(\rho_s)(x,y)$,

$$c = \frac{1}{2^{l(s)}}\rho(f_{l(s)}(x,A), f_{l(s)}(y,A)) \quad \text{і} \quad d = \frac{1}{2^m}\rho_s(f_m(x,A), f_m(y,A)).$$

Оскільки $|a - d| < \varepsilon$, $|b - c| < \varepsilon$, $c \leq a$ і $d \leq b$, отримаємо

$$|a - b| = |u(\rho)(x,y) - u(\rho_s)(x,y)| < \varepsilon.$$

Отже, $u(\rho_s)(x,y) \to u(\rho)(x,y)$. Твердження доведено. $\square$

4.2. Однорідний оператор одночасного продовження ультраметрик, неперервний в топологіях В'єторіса та поточкової збіжності

У попередньому підрозділі та в [63] розглянуто задачу одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених на непорожніх компактних підмножинах нульвимірного метризовного компактного простору. При цьому побудовані оператори продовження ультраметрик не мають повного "спектру" природних властивостей. Зокрема, оператор, побудований в попередньому підрозділі, не є неперервним в топології поточкової збіжності на множині ультраметрик з довільною фіксованою областю визначення і не зберігає виміру Асуада метричного простору, а побудований в [63], — не є однорідним. Метою цього підрозділу є модифікація конструкції оператора продовження неперервних ультраметрик з [63], що одночасно володіє властивостями операторів з [54] і [63]. Основним результатом є існування однорідного оператора продовження ультраметрик, що зберігає максимум двох ультраметрик, норму ультраметрики, а також вимір Асуада ультраметричного простору. Крім того, оператор неперервний у топології В'єторіса, а його звуження на множину ультраметрик з довільною фіксованою компактною областю визначення неперервне в топології поточкової збіжності.

Нехай X — метризовний компактний нульвимірний топологічний простір. Зафіксуємо метрику ρ, яка породжує топологію простору X. Розглянемо множину $\exp X$ всіх непорожніх компактних підмножин простору X з топологією В'єторіса. Для кожної компактної підмножини A простору X розглянемо множину $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ всіх неперервних ультраметрик, визначених на A. Тоді

$$\mathcal{UM}_{\mathrm{c}} = \bigcup\{\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) : A \in \exp X,\ |A| \geq 2\} -$$

множина всіх часткових неперервних ультраметрик, визначених на елементах $\exp X$. Так само, як і в [63], будемо розглядати множину $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ як підмножину множини $\exp(X \times X \times \mathbb{R})$ з топологією підпростору, ототожнюючи при цьому кожну часткову ультраметрику з її графіком.

Будемо розглядати канторову множину C як підмножину множини дійсних чисел $\mathbb{R}$. Бінарним раціональним числом будемо називати довільне число $1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Нам знадобиться такий допоміжний факт (див. [63])

Твердження 4.2. *На канторовій множині C існує ультраметрика d така, що $\dim_A(C,d) = 0$ і $d(x,y) \leq 1$ для довільних $x, y \in C$. Крім цього, ультраметрику d можна вибрати так, що вона набуває лише бінарні раціональні значення.*

Основним результатом даного підрозділу є наступне твердження.

Теорема 4.2. *Існує відображення $v \colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$, яке має наступні властивості для довільних $\sigma, \sigma' \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$:*

1) *v неперервне;*

2) *звуження $v|_{\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)} \colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$ неперервне в топології поточкової збіжності на $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ та $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$ для довільної компактної підмножини A простору X, $|A| \geq 2$;*

3) *$v(\sigma)$ — продовження ультраметрики σ на X;*

4) *$\|v(\sigma)\| = \|\sigma\|$;*

5) *$v(\sigma \wedge \sigma') = v(\sigma) \wedge v(\sigma')$, якщо $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma')$;*

6) *$v(c\sigma) = cv(\sigma)$ для довільного $c > 0$;*

7) $\dim_A(X, v(\sigma)) = \dim_A(\mathrm{dom}(\sigma), \sigma)$.

Доведення. Для побудови оператора продовження використаємо модифікацію конструкції, запропонованої у [63]. Розглянемо замкнену підмножину $K = \{(x, A) \in X \times \exp X : x \in A\}$ простору $X \times \exp X$. Оскільки простір $X \times \exp X$ нульвимірний, компактний і метризовний, то існує неперервне відображення $f\colon X \times \exp X \to C$ таке, що $f(K) = \{0\}$ і звуження $f|_{((X\times\exp X)\setminus K)}$ є гомеоморфним вкладенням (див. [63]). Розглянемо багатозначне відображення $G\colon X \times \exp X \to X$, задане формулою

$$G(x, A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } x \notin A; \\ \{x\}, & \text{якщо } x \in A. \end{cases}$$

Як відомо з [63], існує неперервна селекція $g\colon X \times \exp X \to X$ для відображення G.

Оскільки канторова множина C є універсальною для всіх нульвимірних просторів ваги $\aleph_0$, то існує гомеоморфне вкладення $q\colon X \to C$ простору X в C. Для кожної компактної підмножини A простору X множина $q(A)$ є компактною підмножиною канторової множини $C \subset \mathbb{R}$. Нехай $m(A) = q^{-1}(\min\{q(x)\colon x \in A\})$ і $M(A) = q^{-1}(\max\{q(x)\colon x \in A\})$ для довільного елемента A множини $\exp X$. Очевидно, якщо $|A| \geq 2$, то $m(A) \neq M(A)$. Тепер означимо функцію $w\colon \mathcal{UM}_\mathrm{c} \to \mathbb{R}_+$ за формулою

$$w(\sigma) = \sigma(m(\mathrm{dom}(\sigma)), M(\mathrm{dom}(\sigma))).$$

Твердження. *Відображення $w\colon \mathcal{UM}_\mathrm{c} \to \mathbb{R}_+$ має наступні властивості:*

a) w неперервне;

b) звуження $w|_{\mathcal{UM}_\mathrm{c}(A)}\colon \mathcal{UM}_\mathrm{c}(A) \to \mathbb{R}_+$ неперервне в топології поточкової збіжності на множині $\mathcal{UM}_\mathrm{c}(A)$, $A \in \exp X$, $|A| \geq 2$.

Доведення. Оскільки q — гомеоморфне вкладення, то послідовність $q(A_n)$ збігається до $q(A)$ в просторі $\exp q(X)$ при умові, що послідовність A_n збігається до A в просторі $\exp X$. Звідси отримаємо збіжність послідовностей $q(m(A_n))$ до $q(m(A))$ і $q(M(A_n))$ до $q(M(A))$, а отже, збіжність послідовностей $m(A_n)$ до $m(A)$ і $M(A_n)$ до $M(A)$ за умови, що A_n збігається до A в просторі $\exp X$. Тепер нехай σ_n — послідовність у просторі $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$, яка збігається до ультраметрики $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$. Тоді $\mathrm{dom}(\sigma_n) \to \mathrm{dom}(\sigma)$ в $\exp X$. Можна побудувати неперервну ультраметрику $\widetilde{\sigma}$, що є продовженням ультраметрики σ на простір X, так, щоб $\|\widetilde{\sigma}\| = \|\sigma\|$ (див. [63]). Позначимо через $\widetilde{\sigma}_n$ звуження ультраметрики $\widetilde{\sigma}$ на множину $\mathrm{dom}(\sigma_n) \times \mathrm{dom}(\sigma_n)$. Тоді послідовність $\widetilde{\sigma}_n$ збіжна до ультраметрки σ (див. [33], [63]). Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує натуральне число N таке, що для довільного $n > N$ виконуються наступні умови:

(i) $|\sigma(m(\mathrm{dom}(\sigma)), M(\mathrm{dom}(\sigma))) - \widetilde{\sigma}(m(\mathrm{dom}(\sigma_n)), M(\mathrm{dom}(\sigma_n)))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(ii) $\|\sigma_n - \widetilde{\sigma}_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тоді для довільного $n > N$ отримаємо

$$\begin{gathered}
|w(\sigma) - w(\sigma_n)| = \\
= |\sigma(m(\mathrm{dom}(\sigma)), M(\mathrm{dom}(\sigma))) - \sigma_n(m(\mathrm{dom}(\sigma_n)), M(\mathrm{dom}(\sigma_n)))| \leq \\
\leq |\sigma(m(\mathrm{dom}(\sigma)), M(\mathrm{dom}(\sigma))) - \widetilde{\sigma}(m(\mathrm{dom}(\sigma_n)), M(\mathrm{dom}(\sigma_n)))| + \\
+ |\widetilde{\sigma}(m(\mathrm{dom}(\sigma_n)), M(\mathrm{dom}(\sigma_n))) - \sigma_n(m(\mathrm{dom}(\sigma_n)), M(\mathrm{dom}(\sigma_n)))| < \\
< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{gathered}$$

Отже, w — неперервне відображення.

Залишилось довести, що звуження $w|_{\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)} \colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathbb{R}_+$ неперервне в топології поточкової збіжності на множині $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ для довільної множини $A \in \exp X$, $|A| \geq 2$. Зафіксуємо $A \in \exp X$ і нехай $\{\sigma_s\}_{s\in S}$ — напрямленість в $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$, що поточково збігається до ультраметрики $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$. Тоді $\sigma_s(m(A), M(A))$ збігається до $\sigma(m(A), M(A))$, тобто напрямленість $w(\sigma_s)$ збігається до $w(\sigma)$. $\square$

Означимо оператор $v\colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}} \to \mathbb{R}^{X\times X}$ за формулою

$$v(\sigma)(x,y) = \max\{\sigma(g(x, \mathrm{dom}(\sigma)), g(y, \mathrm{dom}(\sigma))),\\ w(\sigma)d(f(x, \mathrm{dom}(\sigma)), f(y, \mathrm{dom}(\sigma)))\}$$

для довільних $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ та $x, y \in X$.

Зафіксуємо будь-яку ультраметрику σ з множини $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$. Доведемо, що $v(\sigma)(x,y) > 0$ для $x \neq y$, $x, y \in X$. Якщо $x, y \in \mathrm{dom}(\sigma)$, то $g(x, \mathrm{dom}(\sigma)) = x$, $g(y, \mathrm{dom}(\sigma)) = y$. Оскільки σ — метрика, то $\sigma(x,y) > 0$, а отже, $v(\sigma)(x,y) > 0$. У випадку, коли $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$, $y \notin \mathrm{dom}(\sigma)$, отримаємо

$$f(x, \mathrm{dom}(\sigma)) = 0,\ \ f(y, \mathrm{dom}(\sigma)) \neq 0.$$

Оскільки d — метрика, а $w(\sigma)$ — додатнє число, то

$$w(\sigma)d(f(x, \mathrm{dom}(\sigma)), f(y, \mathrm{dom}(\sigma))) > 0.$$

Таким чином, $v(\sigma)(x,y) > 0$. Аналогічно одержимо потрібний результат при умові, що $x \notin \mathrm{dom}(\sigma)$, $y \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Нарешті у випадку, коли $x, y \notin \mathrm{dom}(\sigma)$, отримаємо $f(x, \mathrm{dom}(\sigma)) \neq f(y, \mathrm{dom}(\sigma))$. Звідси

$$w(\sigma)d(f(x, \mathrm{dom}(\sigma)), f(y, \mathrm{dom}(\sigma))) > 0,$$

а отже, $v(\sigma)(x,y) > 0$.

Оскільки σ, d — неперервні ультраметрики, g, f — неперервні відображення, то $v(\sigma)$ — неперервна ультраметрика на X.

1) Доведемо неперервність оператора v. Нехай σ_n — послідовність в $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$, яка збігається до $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$. Тоді $\mathrm{dom}(\sigma_n)$ збігається до $\mathrm{dom}(\sigma)$. Існує неперервна ультраметрика $\widetilde{\sigma}$, яка є продовженням ультраметрики σ на X. Нехай $\widetilde{\sigma}_n = \widetilde{\sigma}|_{\mathrm{dom}(\sigma_n)\times\mathrm{dom}(\sigma_n)}$. Тоді послідовність $\widetilde{\sigma}_n$ збігається до σ у просторі $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ (див. [33], [63]). Нехай $\mathrm{dom}(\sigma) = B$, $\mathrm{dom}(\sigma_n) = B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки відображення $\widetilde{\sigma}$, d, g, f рівномірно неперервні, то існує натуральне число N таке, що для довільного $n > N$ виконуються умови

(i) $\|\sigma_n - \widetilde{\sigma}_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(ii) $|\sigma(g(x,B), g(y,B)) - \widetilde{\sigma}(g(x,B_n), g(y,B_n))| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(iii) $|d(f(x,B), f(y,B)) - d(f(x,B_n), f(y,B_n))| < \dfrac{\varepsilon}{2\|\sigma\|}$;

(iv) $|w(\sigma) - w(\sigma_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Отже, для кожного $n > N$ та довільних $x, y \in X$ отримаємо

$$|\sigma(g(x,B), g(y,B)) - \sigma_n(g(x,B_n), g(y,B_n))| \leq$$
$$\leq |\sigma(g(x,B), g(y,B)) - \widetilde{\sigma}(g(x,B_n), g(y,B_n))| +$$
$$+|\widetilde{\sigma}(g(x,B_n), g(y,B_n)) - \sigma_n(g(x,B_n), g(y,B_n))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Крім цього,

$$|w(\sigma)d(f(x,B), f(y,B)) - w(\sigma_n)d(f(x,B_n), f(y,B_n))| \leq$$
$$\leq w(\sigma)|d(f(x,B), f(y,B)) - d(f(x,B_n), f(y,B_n))| +$$
$$+|w(\sigma) - w(\sigma_n)|d(f(x,B_n), f(y,B_n)) \leq$$
$$\leq \|\sigma\||d(f(x,B), f(y,B)) - d(f(x,B_n), f(y,B_n))| +$$
$$+|w(\sigma) - w(\sigma_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, $|v(\sigma)(x,y) - v(\sigma_n)(x,y)| < \varepsilon$ для довільних $x, y \in X$. Отже, v — неперервне відображення.

2) Зафіксуємо довільну компактну підмножину A простору X таку, що $|A| \geq 2$. Нехай $\{\sigma_s\}_{s\in S}$ — напрямленість ультраметрик з

$\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$, яка поточково збігається до $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ на $A \times A$. Доведемо, що $v(\sigma_s)(x,y)$ збігається до $v(\sigma)(x,y)$ для довільної точки $(x,y) \in X \times X$. Зафіксуємо $(x,y) \in X \times X$. Існує індекс $s_0 \in S$ такий, що для довільного $s \geq s_0$ виконуються наступні умови:

(i′) $|\sigma(g(x,A), g(y,A)) - \sigma_s(g(x,A), g(y,A))| < \varepsilon$;

(ii′) $|w(\sigma) - w(\sigma_s)| \equiv |\sigma(m(A), M(A)) - \sigma_s(m(A), M(A))| < \varepsilon$;

З умови (ii′) отримаємо

$$|w(\sigma)d(f(x,A), f(y,A)) - w(\sigma_s)d(f(x,A), f(y,A))| =$$
$$= d(f(x,A), f(y,A))|w(\sigma) - w(\sigma_s)| \leq |w(\sigma) - w(\sigma_s)| < \varepsilon.$$

Оскільки

$$v(\sigma)(x,y) = \max\{\sigma(g(x,A), g(y,A)),\ w(\sigma)d(f(x,A), f(y,A))\}$$

і

$$v(\sigma_s)(x,y) = \max\{\sigma_s(g(x,A), g(y,A)),\ w(\sigma_s)d(f(x,A), f(y,A))\}$$

для кожного $s \in S$, то $|v(\sigma)(x,y) - v(\sigma_s)(x,y)| < \varepsilon$ для довільного $s \geq s_0$. Отже, напрямленість $v(\sigma_s)$ збігається поточково до $v(\sigma)$ на $X \times X$.

3) Нехай $x, y \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Тоді

$$f(x, \mathrm{dom}(\sigma)) = f(y, \mathrm{dom}(\sigma)) = 0,$$

$$g(x, \mathrm{dom}(\sigma)) = x,\ g(y, \mathrm{dom}(\sigma)) = y.$$

Звідси $v(\sigma)(x,y) = \sigma(x,y)$. Отже, v — оператор продовження.

4) Враховуючи те, що ультраметрика d обмежена числом 1 і $w(\sigma) \leq \|\sigma\|$, отримаємо $v(\sigma) \leq \|\sigma\|$. Оскільки ультраметрика $v(\sigma)$ набуває свого максимального значення $\|\sigma\|$ на множині $\mathrm{dom}(\sigma) \times \mathrm{dom}(\sigma) \subset X \times X$, то $\|v(\sigma)\| = \|\sigma\|$.

5) Доведемо, що $v(\sigma \wedge \sigma') = v(\sigma) \wedge v(\sigma')$ для довільних σ, σ' таких, що $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma') = A$. Для будь-яких $x, y \in X$ отримаємо

$$v(\sigma) \wedge v(\sigma')(x,y) =$$
$$= \max\Big\{ \max\{\sigma(g(x,A), g(y,A)),\ w(\sigma)d(f(x,A), f(y,A))\},$$
$$\max\{\sigma'(g(x,A), g(y,A)),\ w(\sigma')d(f(x,A), f(y,A))\}\Big\} =$$
$$= \max\Big\{\sigma(g(x,A), g(y,A)), \sigma'(g(x,A), g(y,A)),$$
$$w(\sigma)d(f(x,A), f(y,A)), w(\sigma')d(f(x,A), f(y,A))\Big\} =$$
$$= \max\Big\{ \max\{\sigma(g(x,A), g(y,A)), \sigma'(g(x,A), g(y,A))\},$$
$$\max\{w(\sigma), w(\sigma')\}d(f(x,A), f(y,A))\Big\}.$$

Оскільки

$$\max\{w(\sigma), w(\sigma')\} =$$
$$= \max\{\sigma(m(A), M(A)), \sigma'(m(A), M(A))\} = w(\sigma \wedge \sigma'),$$

то

$$(v(\sigma) \wedge v(\sigma'))(x,y) = \max\{(\sigma \wedge \sigma')(g(x,A), g(y,A)),$$
$$w(\sigma \wedge \sigma')d(f(x,A), f(y,A))\} = v(\sigma \wedge \sigma')(x,y).$$

6) Нехай $c > 0$ — довільне число і $\mathrm{dom}(\sigma) = B$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ отримаємо

$$v(c\sigma)(x,y) = \max\Big\{c\sigma(g(x,B), g(y,B)),$$
$$c\sigma(m(B), M(B))d(f(x,B), f(y,B))\Big\} = cv(\sigma)(x,y).$$

7) Оскільки $\dim_A(C,d) = 0$, то $\dim_A(C, w(\sigma)d) = 0$ для кожного фіксованого $\sigma \in \mathcal{UM}_c$. За теоремою 5.A з [39] і твердженнями 2.1, 2.3 з [63] отримаємо

$$\dim_A(X, v(\sigma)) \le \dim_A(\mathrm{dom}(\sigma), \sigma) + \dim_A(C, w(\sigma)d) =$$
$$= \dim_A(\mathrm{dom}(\sigma), \sigma).$$

З монотонності виміру Асуада випливає рівність $\dim_A(X, v(\sigma)) = \dim_A(\mathrm{dom}(\sigma), \sigma)$. $\square$

Нескладно переконатися, використовуючи твердження 4.2, що оператор продовження з попередньої теореми має також таку властивість. Якщо часткова ультраметрика $\sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ набуває лише бінарні раціональні значення, то $v(\sigma)$ також набуває лише бінарні раціональні значення (див. [63]).

4.3. Продовження рівномірно незв'язних метрик

У [16] запроваджено клас рівномірно незв'язних метрик, який у певному сенсі є узагальненням класу ультраметрик.

Означення 4.1. *Метрика σ на множині Y називається c-рівномірно незв'язною, якщо існує число $c > 0$ таке, що для довільної скінченної сім'ї $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ елементів множини Y виконується умова*

$$c\sigma(y_0, y_n) \leq \max\{\sigma(y_j, y_{j-1}) : j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Відомо, що метричний простір (Y, ρ) є рівномірно незв'язним (тобто метрика ρ на множині Y є рівномірно незв'язною) тоді і лише тоді, коли метрика ρ бі-ліпшицево еквівалентна деякій ультраметриці на множині Y (див. [16]). Нескладно переконатися, що кожна ультраметрика є насправді 1-рівномірно незв'язною метрикою.

Твердження 4.3. *Нехай Y — деяка множина, $|Y| \geq 2$. Тоді, якщо σ_1, σ_2 — рівномірно незв'язні метрики, визначені на множині Y, то відображення $\max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ — рівномірно незв'язна метрика на множині Y.*

Доведення. Оскільки метрики σ_1 та σ_2 рівномірно незв'язні, то існують числа $c_1, c_2 > 0$ такі, що що для довільної скінченної підмножини $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ множини Y виконуються нерівності

$$c_i\sigma_i(y_0, y_n) \leq \max\{\sigma_i(y_j, y_{j-1}) : j \in \{1, \ldots, n\}\}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Зрозуміло, що дані нерівності будуть справедливими, якщо замість c_i, $i \in \{1, 2\}$ взяти $c = \min\{c_1, c_2\}$. Тоді

$$c \max\{\sigma_1(y_0, y_n), \sigma_2(y_0, y_n)\} \leq$$

$$\leq \max\{\max\{\sigma_1(y_j, y_{j-1}) : j \in \{1, \ldots, n\}\},$$
$$\max\{\sigma_2(y_j, y_{j-1}) : j \in \{1, \ldots, n\}\}\} =$$
$$= \max\{\max\{\sigma_1(y_j, y_{j-1}), \sigma_2(y_j, y_{j-1})\} : j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Отже, метрика $\max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ — рівномірно незв'язна. □

Твердження 4.4. *Оператор v продовження ультраметрик, розглянутий у теоремі 4.2, зберігає неперервні рівномірно незв'язні метрики, задані на компактних підмножинах нульвимірного компактного метризовного простору X. Крім цього, якщо σ — часткова c-рівномірно незв'язна метрика, то $v(\sigma)$ — c-рівномірно незв'язна метрика на X.*

Доведення. Нехай σ — довільна неперервна c-рівномірно незв'язна метрика, задана на довільній компактній підмножині A простору X. Тоді продовження метрики σ задається формулою

$$v(\sigma)(x, y) = \max\{\sigma(g(x, A), g(y, A)), w(\sigma)d(f(x, A), f(y, A))\}$$

для всіх $x, y \in X$. Доведемо, що $v(\sigma)$ — c-рівномірно незв'язна. Зафіксуємо довільну множину $\{y_0, \ldots, y_n\}$ елементів простору X. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $c \leq 1$. Тоді, використовуючи те, що d — 1-рівномірно незв'язна метрика, отримаємо

$$cv(\sigma)(y_0, y_n) =$$
$$= \max\{c\sigma(g(y_0, A), g(y_n, A)), cw(\sigma)d(f(y_0, A), f(y_n, A))\} \leq$$
$$\leq \max\Big\{ \max\{\sigma(g(y_0, A), g(y_1, A)), \ldots, \sigma(g(y_{n-1}, A), g(y_n, A))\},$$
$$w(\sigma) \max\{d(f(y_0, A), f(y_1, A)), \ldots, d(f(y_{n-1}, A), f(y_n, A))\}\Big\} =$$
$$= \max\Big\{ \max\{\sigma(g(y_0, A), g(y_1, A)), w(\sigma)d(f(y_0, A), f(y_1, A))\}, \ldots,$$
$$\max\{\sigma(g(y_{n-1}, A), g(y_n, A)), w(\sigma)d(f(y_{n-1}, A), f(y_n, A))\}\Big\} =$$
$$= \max\{v(\sigma)(y_0, y_1), \ldots, v(\sigma)(y_{n-1}, y_n)\}.$$

Отже, метрика $v(\sigma)$ c-рівномірно незв'язна. □

Так само, як і в попередніх підрозділах можна розглядати множину $\mathcal{UDM}(A)$ неперервних рівномірно незв'язних метрик, визначених на множині $A \in \exp X$, в топології В'єторіса. Тоді

$$\mathcal{UDM} = \bigcup \{\mathcal{UDM}(A) : A \in \exp X,\ |A| \geq 2\}.$$

Отже, оператор продовження, побудований в попередньому підрозділі, можна використати для одночасного продовження неперервних рівномірно незв'язних метрик, визначених на замкнених підмножинах компактного нульвимірного метризовного топологічного простору. Тому справедливим є наступне твердження.

Теорема 4.3. *Існує відображення $v\colon \mathcal{UDM} \to \mathcal{UDM}(X)$, яке має наступні властивості для довільних $\sigma, \sigma' \in \mathcal{UDM}$:*

1) *v неперервне;*
2) *звуження $v|_{\mathcal{UDM}(A)}\colon \mathcal{UDM}(A) \to \mathcal{UDM}(X)$ неперервне в топології поточкової збіжності на $\mathcal{UDM}(A)$ та $\mathcal{UDM}(X)$ для довільної компактної підмножини A простору X;*
3) *$v(\sigma)$ — продовження рівномірно незв'язної метрики σ на X;*
4) *$\|v(\sigma)\| = \|\sigma\|$;*
5) *$v(\max\{\sigma, \sigma'\}) = \max\{v(\sigma), v(\sigma')\}$, якщо $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma')$;*
6) *$v(c\sigma) = cv(\sigma)$ для довільного $c > 0$;*
7) *$\dim_A(X, v(\sigma)) = \dim_A(\mathrm{dom}(\sigma), \sigma)$.*

4.4. Висновки

Результати даного розділу стосуються існування однорідних операторів одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених на замкнених підмножинах метризовного компактного нульвимірного топологічного простору. Основна теорема підрозділу 4.1 стверджує, що існує однорідний оператор одночасного продовження ультраметрик, який володіє всіма властивостями оператора, побудованого М. М. Зарічним та Е. Д. Тимчатином у [63], крім неперервності в топології поточкової збіжності та збереження виміру Асуада ультраметричного простору. Основним результатом розділу є теорема про існування оператора, який в сукупності має всі властивості операторів з [63] та підрозділу 4.1. Крім цього, доведено, що дану конструкцію можна використати для розв'язання аналогічної задачі продовження рівномірно незв'язних метрик.

РОЗДІЛ 5

ОПЕРАТОРИ ПРОДОВЖЕННЯ УЛЬТРАМЕТРИК ТА ПСЕВДОМЕТРИК У НУЛЬВИМІРНИХ ТА ВЛАСНИХ ПРОСТОРАХ

Даний розділ присвячено побудові та подальшому дослідженню властивостей операторів продовження ультраметрик та псевдометрик, визначених на підпросторах нульвимірних топологічних просторів. Зокрема, доведено існування однорідного та неперервного у топології поточкової збіжності оператора продовження неперервних ультраметрик, визначених на фіксованій замкненій підмножині некомпактного метризовного нульвимірного простору. Описано властивості оператора одночасного продовження неперервних псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах локально компактного топологічного простору. Крім цього, описано оператор продовження сімей узгоджених неперервних ультраметрик, визначених на ланцюгах замкнених(компактних) підмножин нульвимірного метризовного топологічного простору. Також розглянуто задачу продовження грубо рівномірних метрик, визначених на замкненій підмножині власного метричного простору.

5.1. Оператор продовження ультраметрик, заданих на фіксованій підмножині некомпактного топологічного простору

У [63] та в попередньому розділі побудовано оператори одночасного продовження часткових неперервних ультраметрик, заданих на замкнених підмножинах компактного нульвимірного метричного простору. Простори ультраметрик розглянуто в топології В'єторіса. У даному підрозділі розглядаємо аналогічну задачу для фіксованої області визначення в іншій топології на просторі ультра(псевдо)метрик, а саме, в топології поточкової збіжності. При цьому ми не будемо вимагати компактності простору, який розглядаємо. Зауважимо, що існування оператора продовження метрик, неперервного в топології поточкової збіжності, доведено Т. О. Банахом і Ч. Бессагою [10].

Зафіксуємо нульвимірний некомпактний сепарабельний метризовний простір X і нехай d — метрика на X, обмежена числом 1. Нехай A — фіксована замкнена підмножина простору X така, що $|A| \geq 2$. Множини $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ та $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$ всіх неперервних ультраметрик, заданих відповідно на A та X, замкнені відносно операції взяття поточкового максимуму $\wedge$ і відносно множення на невід'ємні числа.

Основним результатом даного підрозділу є таке твердження:

Теорема 5.1. *Нехай X — нульвимірний сепарабельний метризовний топологічний простір, A — довільна замкнена підмножина простору X така, що $|A| \geq 2$. Тоді існує оператор $v\colon \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A) \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$, який для будь-яких $\rho, \sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ має такі властивості:*

(1) *$v(\rho)$ — продовження ультраметрики ρ на X ;*

(2) *$v(\rho \wedge \sigma) = v(\rho) \wedge v(\sigma)$ і $v(c\rho) = cv(\rho)$ для кожного $c > 0$;*

(3) *v неперервний відносно топології поточкової збіжності на множинах $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ та $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(X)$.*

Для простору X можна вибрати відкрите покриття $\mathcal{W}$ множини $X \setminus A$, яке задовольняє наступні умови [14]:

1) покриття $\mathcal{W}$ диз'юнктне, тобто для довільних $W, W' \in \mathcal{W}$ таких, що $W \neq W'$ маємо $W \cap W' = \varnothing$;

2) для кожної точки $x \in A$ і довільного околу U_x точки x в X існує окіл V_x точки x в X такий, що з умови $W \cap V_x \neq \varnothing$ для деякого $W \in \mathcal{W}$ випливає включення $W \subset U_x$.

З властивості 2) можна також вивести наступну умову. Якщо x належить межі множини A, то будь-який окіл точки x містить нескінченну кількість елементів покриття $\mathcal{W}$. Зокрема, покриття $\mathcal{W}$ можна отримати, вибравши диз'юнктне покриття, вписане у покриття

$$\{B(x, d(x, A)/2) : x \in X \setminus A\}$$

множини $X \setminus A$, де $B(x, \varepsilon)$ — відкрита куля радіуса ε з центром в $x \in X$. Тепер для кожного $W \in \mathcal{W}$ зафіксуємо точки $w \in W$ та $\lambda(w) \in A$ так, щоб $d(w, \lambda(w)) \leq 2d(w, A)$. Означимо відображення $s : X \to A$ за формулою

$$s(x) = \begin{cases} \lambda(w), & \text{якщо } x \in W \in \mathcal{W}; \\ x, & \text{якщо } x \in A. \end{cases}$$

Оскільки покриття $\mathcal{W}$ диз'юнктне, очевидно, що відображення s означене коректно. Доведемо неперервність відображення s. Нехай $\{x_k\}$ — довільна послідовність в просторі X, яка збігається до деякої точки $x \in X$. Якщо $x \in X \setminus A$, то існує єдиний елемент $W \in \mathcal{W}$ такий, що $x \in W$. Тоді $s(x) = \lambda(w)$, де w — відмічена точка елемента покриття W. Оскільки послідовність $\{x_k\}$ збігається до x, то існує натуральне число k_0 таке, що $x_k \in W$ для всіх $k > k_0$. Отже, $s(x_k) = \lambda(w)$ для всіх $k > k_0$. Тепер розглянемо випадок, коли x належить множині A. Тоді за означенням відображення s маємо $s(x) = x$. Якщо x — внутрішня точка множини A, то існує натуральне число k_0 таке, що $x_k \in A$ для всіх $k > k_0$. Тоді $s(x_k) = x_k$ при $k > k_0$, а тому $s(x_k)$ збігається до $s(x)$. Тепер припустимо, що точка x належить межі множини A. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Позначимо через w_k відмічені точки елементів покриття $W_k \in \mathcal{W}$, для яких виконується умова $x_k \in W_k$. Існує натуральне число $k(\varepsilon)$ таке, що $x_k \in B(x, \varepsilon/3)$ і $W_k \subset B(x, \varepsilon/3)$ для всіх $k > k(\varepsilon)$. Тоді для довільних $k > k(\varepsilon)$ отримаємо

$$d(s(x_k), s(x)) = \begin{cases} d(\lambda(w_k), x), \text{ якщо } x_k \in W_k; \\ d(x_k, x) < \varepsilon, \text{ якщо } x_k \in A. \end{cases}$$

Оскільки

$$d(\lambda(w_k), x) \leq d(\lambda(w_k), w_k) + d(w_k, x) <$$
$$< 2d(w_k, A) + d(w_k, x) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

бачимо, що послідовність $s(x_k)$ збігається до $s(x)$.

Для довільного $n \in \mathbb{N}$ виберемо диз'юнктне відкрите покриття $\mathcal{U}_n$ простору X таке, що $\operatorname{diam}_d(U) < 2^{-n}$ для будь-якого $U \in \mathcal{U}_n$. Будемо розглядати кожну множину $\mathcal{U}_n$ як дискретний топологічний простір, і нехай $s_n : X \to \mathcal{U}_n$ — відображення, означене наступним чином:

$$s_n(x) = U, \text{ якщо } x \in U \in \mathcal{U}_n \text{ для кожного } x \in X.$$

Тепер нехай $A \sqcup \mathcal{U} = A \sqcup \mathcal{U}_1 \sqcup \mathcal{U}_2 \sqcup \dots$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо $B\left(A, \frac{1}{n}\right)$ — об'єднання всіх куль радіуса $1/n$ з центрами в множині A, тобто

$$B\left(A, \frac{1}{n}\right) = \left\{x \in X : d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Відомо, що для кожної пари неперетинних замкнених підмножин B і C сепарабельного нульвимірного метричного простору Y порожня множина є перегородкою між B і C, тобто існує відкрито-замкнена множина $V \subset Y$ така, що $B \subset V$ і $C \subset Y \setminus V$, [22]. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує відкрито-замкнена множина $L_n \subset B\left(A, \frac{1}{n}\right)$ така, що $A \subset L_n$. Означимо тепер відображення $g_n : X \to A \sqcup \mathcal{U}$ для $n \in \mathbb{N}$ формулою

$$g_n(x) = \begin{cases} s_n(x), & \text{якщо } x \in X \setminus L_n, \\ s(x), & \text{якщо } x \in L_n. \end{cases}$$

Нескладно переконатися, що кожна з функцій g_n є неперервною. Справді, для довільної відкритої множини T в просторі $A \sqcup \mathcal{U}$ отримаємо

$$g_n^{-1}(T) = \{x \in X : g_n(x) \in T\} =$$
$$= \{x \in X : g_n(x) \in T \cap A\} \cup \{x \in X : g_n(x) \in T \cap \mathcal{U}\} =$$
$$= s^{-1}(T \cap A) \cup s_n^{-1}(T \cap \mathcal{U}) -$$

відкрита множина в X для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Тепер візьмемо дві довільні різні точки $a, b \in A$ і розглянемо оператор $H : \mathbb{R}^{A \times A} \to \mathbb{R}^{(A \sqcup \mathcal{U}) \times (A \sqcup \mathcal{U})}$, означений формулою

$$H(\rho)(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{якщо } x, y \in A; \\ \max\{\rho(x, a), \rho(x, b)\}, & \text{якщо } x \in A,\ y \in \mathcal{U}; \\ \max\{\rho(a, y), \rho(b, y)\}, & \text{якщо } x \in \mathcal{U},\ y \in A; \\ \rho(a, b), & \text{якщо } x, y \in \mathcal{U} \text{ і } x \neq y; \\ 0, & \text{якщо } x = y \end{cases}$$

для довільних $x, y \in A \sqcup \mathcal{U}$ і $\rho \in \mathbb{R}^{A \times A}$.

Твердження 5.1. *Відображення H є оператором продовження, який зберігає неперервні ультраметрики, задані на A.*

Доведення. Легко бачити, що H продовжує функції з $\mathbb{R}^{A \times A}$ на $(A \sqcup \mathcal{U}) \times (A \sqcup \mathcal{U})$ і що H зберігає неперервні симетричні функції. Доведемо, що H зберігає ультраметрики. Візьмемо довільну ультраметрику $\rho \in \mathcal{UM}_c(A)$ і зафіксуємо точки $x, y, z \in A \sqcup \mathcal{U}$. Для перевірки виконання нерівності ультраметрики для $H(\rho)$ розглянемо кілька випадків. Спочатку припустимо, що всі точки x, y та z різні. Тоді отримаємо такі випадки:

1) $x, y, z \in A$. Тоді $H(\rho)(x,y) = \rho(x,y)$, $H(\rho)(x,z) = \rho(x,z)$ і $H(\rho)(y,z) = \rho(y,z)$ і таким чином нерівність очевидна;

2) $x, y \in A$, $z \in \mathcal{U}$. Тоді

$$H(\rho)(x,y) = \rho(x,y),\ H(\rho)(x,z) = \max\{\rho(x,a), \rho(x,b)\}$$

і $H(\rho)(y,z) = \max\{\rho(y,a), \rho(y,b)\}$. Оскільки $\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,a), \rho(y,a)\}$ і $\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,b), \rho(y,b)\}$, отримаємо

$$H(\rho)(x,y) \leq \max\{\rho(x,a), \rho(y,a), \rho(x,b), \rho(y,b)\} =$$

$$= \max\{H(\rho)(x,z), H(\rho)(y,z)\};$$

3) $x \in A$, $y, z \in \mathcal{U}$. Маємо

$$H(\rho)(x,y) = H(\rho)(x,z) = \max\{\rho(x,a), \rho(x,b)\},$$

тому нерівність ультраметрики очевидна;

4) $y \in A$, $x, z \in \mathcal{U}$. Тоді

$$H(\rho)(x,y) = H(\rho)(y,z) = \max\{\rho(a,y), \rho(b,y)\}$$

і бажана нерівність знову очевидно виконується;

5) $z \in A$, $x, y \in \mathcal{U}$. Отримуємо

$$H(\rho)(x,z) = H(\rho)(y,z) = \max\{\rho(z,a), \rho(z,b)\}$$

і $H(\rho)(x,y) = \rho(a,b)$. Оскільки $\rho(a,b) \leq \max\{\rho(a,z), \rho(b,z)\}$, ми одержимо

$$H(\rho)(x,y) \leq \max\{H(\rho)(x,z), H(\rho)(y,z)\};$$

6) $x, y, z \in \mathcal{U}$. Цей випадок тривіальний, оскільки

$$H(\rho)(x,y) = H(\rho)(x,z) = H(\rho)(y,z) = \rho(a,b).$$

Припустимо, що не всі точки x, y, z різні. Якщо $x = y$ або $x = y = z$, то нерівність ультраметрики очевидна. Якщо $y = z$, то $H(\rho)(x,y) = H(\rho)(x,z)$. Нарешті, якщо $x \neq y$, то $H(\rho)(x,y) = H(\rho)(x,z)$ або $H(\rho)(x,y) = H(\rho)(y,z)$. Отже, $H(\rho)$ — ультраметрика на $A \sqcup \mathcal{U}$. Оскільки H зберігає неперервні функції, бачимо, що $H(\rho)$ — неперервна ультраметрика на $A \sqcup \mathcal{U}$.

□

Тепер означимо відображення $v : \mathbb{R}^{A\times A} \to \mathbb{R}^{X\times X}$ наступною формулою

$$v(\rho)(x,y) = \max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\}$$

для всіх $x, y \in X$ і $\rho \in \mathbb{R}^{A\times A}$. Якщо $x, y \in X\backslash A$, то існує натуральне число m таке, що $d(x, A) \geq 1/m$ і $d(y, A) \geq 1/m$, а отже, $x, y \in X \setminus L_m$. Тоді для всіх $n \geq m$ отримаємо $g_n(x), g_n(y) \in \mathcal{U}$, тому

$$H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) \leq \rho(a,b).$$

Якщо $x \in A$ і $y \in X \setminus A$, то матимемо

$$H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) = \max\{\rho(x,a), \rho(x,b)\}$$

для всіх n, більших від деякого натурального числа $m' \in \mathbb{N}$. Нарешті, якщо $x, y \in A$, то отримаємо

$$H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) = H(\rho)(s(x), s(y)) = H(\rho)(x,y) = \rho(x,y)$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, відображення v визначене коректно і є оператором продовження.

Твердження 5.2. *Оператор v зберігає неперервні ультраметрики.*

Доведення. Нехай ρ — неперервна ультраметрика на A. Очевидно, що умова симетрії виконується для $v(\rho)$. Візьмемо довільні точки x, y, z з X. Використовуючи попереднє твердження, отримаємо

$$v(\rho)(x,y) = \max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\} \leq$$

$$\leq \max\{\max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(z)), H(\rho)(g_n(y), g_n(z))\} : n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \max\{\max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(z)) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\max\{H(\rho)(g_n(y), g_n(z)) : n \in \mathbb{N}\}\} = \max\{v(\rho)(x,z), v(\rho)(y,z)\}.$$

Залишається довести, що $v(\rho)(x,y) > 0$ при $x \neq y$. Для цього зафіксуємо довільні $x, y \in X$ такі, що $x \neq y$.

Якщо $x, y \in A$ то $v(\rho)(x,y) = \rho(x,y) > 0$, бо ρ — метрика на A. Тепер розглянемо випадок, коли $x \in A$ і $y \notin A$. Існує натуральне число m таке, що $d(y, A) > 1/m$, тому $y \notin L_m$. Тоді $g_m(x) = x$ і $g_m(y) = s_m(y) \in \mathcal{U}_m$. Отримаємо

$$H(\rho)(x, s_m(y)) = \max\{\rho(x,a), \rho(x,b)\} \geq \rho(a,b) > 0.$$

Звідси випливає $v(\rho)(x,y) > 0$.

Нарешті припустимо, що $x, y \in X \setminus A$. Тоді існує число $m \in \mathbb{N}$ таке, що $d(x, A) > 1/m$, $d(y, A) > 1/m$ і тому $x, y \in X \setminus L_m$. Більш того, можна вибрати число m достатньо великим, щоб виконувалась умова $d(x,y) > 2^{-m+1}$. За означенням функції g_m отримаємо $g_m(x) = s_m(x)$ і $g_m(y) = s_m(y)$. Оскільки $\operatorname{diam}(U) < 2^{-m}$ для будь-якого $U \in \mathcal{U}_m$, то бачимо, що точки x та y не можуть міститися в одному елементі покриття $\mathcal{U}_m$, бо $d(x,y) > 2^{-m}$. Тому ми отримаємо $g_m(x) \neq g_m(y)$ і як наслідок

$$H(\rho)(g_m(x), g_m(y)) = \rho(a,b) > 0.$$

Звідси випливає, що $v(\rho)(x, y) > 0$. Отже, оператор v зберігає ультраметрики. За неперервністю функцій $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, операції взяття поточкового максимуму та за властивостями оператора H отримуємо неперервність ультраметрики $v(\rho)$ на X. $\square$

Твердження 5.3. *Оператор v неперервний відносно топології поточкової збіжності на $\mathcal{UM}_c(A)$ та $\mathcal{UM}_c(X)$.*

Доведення. Нехай $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — напрямленість в $\mathcal{UM}_c(A)$, що збігається поточково до $\rho \in \mathcal{UM}_c(A)$ на $A \times A$. Візьмемо довільну точку $(x, y) \in X \times X$ і розглянемо кілька випадків.

1) $(x, y) \in (X \setminus A) \times (X \setminus A)$. Існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $g_n(x) \in \mathcal{U}$ і $g_n(y) \in \mathcal{U}$ для кожного $n \geq m$. Тоді ми отримаємо $H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) \leq \rho(a, b)$ і $H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y)) \leq \rho_\lambda(a, b)$ для всіх $n \geq m$ і $\lambda \in \Lambda$. Тому маємо

$$v(\rho)(x, y) = \max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \{1, \ldots, m\}\}$$

і

$$v(\rho_\lambda)(x, y) = \max\{H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \{1, \ldots, m\}\}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. За умовою існує індекс $\lambda_0 \in \Lambda$ такий, що для всіх $\lambda \geq \lambda_0$ виконуються такі нерівності:

$$|\rho(s(x), s(y)) - \rho_\lambda(s(x), s(y))| < \varepsilon, \quad |\rho(s(x), a) - \rho_\lambda(s(x), a)| < \varepsilon,$$

$$|\rho(s(x), b) - \rho_\lambda(s(x), b)| < \varepsilon, \quad |\rho(a, s(y)) - \rho_\lambda(a, s(y))| < \varepsilon,$$

$$|\rho(b, s(y)) - \rho_\lambda(b, s(y))| < \varepsilon \text{ і } |\rho(a, b) - \rho_\lambda(a, b)| < \varepsilon.$$

Візьмемо довільне $\lambda \geq \lambda_0$. Тоді для кожного $n \in \{1, \ldots, m\}$ спочатку припустимо, що $g_n(x) \neq g_n(y)$ і розглянемо кілька випадків:

(i) $g_n(x), g_n(y) \in A$. Тоді

$$|H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y))| =$$

$$= |\rho(s(x), s(y)) - \rho_\lambda(s(x), s(y))| < \varepsilon.$$

(ii) $g_n(x) \in A, g_n(y) \in \mathcal{U}$. Тоді

$$|H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y))| =$$

$$= |\max\{\rho(s(x), a), \rho(s(x), b)\} - \max\{\rho_\lambda(s(x), a), \rho_\lambda(s(x), b)\}| < \varepsilon.$$

(iii) $g_n(x) \in \mathcal{U}, g_n(y) \in A$. Отримаємо

$$|H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y))| =$$

$$= |\max\{\rho(a, s(y)), \rho(b, s(y))\} - \max\{\rho_\lambda(a, s(y)), \rho_\lambda(b, s(y))\}| < \varepsilon.$$

(iv) $g_n(x), g_n(y) \in \mathcal{U}$. Матимемо

$$|H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y))| = |\rho(a, b) - \rho_\lambda(a, b)| < \varepsilon.$$

Очевидно, що отримаємо потрібну нерівність, якщо $g_n(x) = g_n(y)$ для деякого $n \in \{1, \ldots, m\}$. Отже,

$$|H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y))| < \varepsilon$$

для кожного $\lambda \geq \lambda_0$ і всіх $n \in \{1, \ldots, m\}$. Звідси, $|v(\rho)(x, y) - v(\rho_\lambda)(x, y)| < \varepsilon$ для всіх $\lambda \geq \lambda_0$.

2) $x \in A$, $y \in X \setminus A$. Подібно, як і в попередньому випадку, існує натуральне число m_1 таке, що $H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) \leq \rho(a, b)$ і $H(\rho_\lambda)(g_n(x), g_n(y)) \leq \rho_\lambda(a, b)$ для всіх $n \geq m_1$ і $\lambda \in \Lambda$. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне. Тоді існує $\lambda_1 \in \Lambda$ таке, що для всіх $\lambda \geq \lambda_1$ матимемо

$$|\rho(x, s(y)) - \rho_\lambda(x, s(y))| < \varepsilon, \quad |\rho(x, a) - \rho_\lambda(x, a)| < \varepsilon$$

і $|\rho(x, b) - \rho_\lambda(x, b)| < \varepsilon$. Візьмемо довільні індекс $\lambda \geq \lambda_1$ і число $n \in \{1, \ldots, m_1\}$. Оскільки $x \in A$, отримаємо $g_n(x) = x$. Якщо $g_n(y) \in A$, то

$$|H(\rho)(x, g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(x, g_n(y))| = |\rho(x, s(y)) - \rho_\lambda(x, s(y))| < \varepsilon.$$

Якщо $g_n(y) \in \mathcal{U}$, то отримаємо

$$|H(\rho)(x, g_n(y)) - H(\rho_\lambda)(x, g_n(y))| =$$

$$= |\max\{\rho(x, a), \rho(x, b)\} - \max\{\rho_\lambda(x, a), \rho_\lambda(x, b)\}| < \varepsilon.$$

Таким чином, $|v(\rho)(x, y) - v(\rho_\lambda)(x, y)| < \varepsilon$ для всіх $\lambda \geq \lambda_1$.

3) $y \in A$, $x \in X \setminus A$. Доведення таке саме, як у випадку **2)**.

4) $x, y \in A$. Оскільки $v(\rho)(x, y) = \rho(x, y)$ і $v(\rho_\lambda)(x, y) = \rho_\lambda(x, y)$ для всіх $\lambda \in \Lambda$, отримаємо $v(\rho_\lambda)(x, y) \to v(\rho)(x, y)$ і доведення завершено.

$\square$

Твердження 5.4. *Для будь-яких $\rho, \sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ і $c > 0$ маємо $v(\rho \wedge \sigma) = v(\rho) \wedge v(\sigma)$ і $v(c\rho) = cv(\rho)$.*

Доведення. Нехай $\rho, \sigma \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ — довільні. Тоді для будь-яких $x, y \in X$ отримаємо

$$(v(\rho) \wedge v(\sigma))(x, y) = \max\{\max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$\max\{H(\sigma)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\}\} =$$

$$= \max\{\max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)), H(\sigma)(g_n(x), g_n(y))\} : n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \max\{H(\max\{\rho, \sigma\})(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\} = v(\rho \wedge \sigma)(x, y).$$

Для довільних числа $c > 0$ та ультраметрики $\rho \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$ отримаємо

$$v(c\rho)(x, y) = \max\{H(c\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= c \max\{H(\rho)(g_n(x), g_n(y)) : n \in \mathbb{N}\} = cv(\rho)(x, y).$$

$\square$

Разом твердження 5.1-5.4 становлять доведення теореми 5.1.

5.2. Оператори продовження сімей узгоджених ультраметрик

У даному підрозділі розглядається задача продовження сімей узгоджених ультраметрик, визначених на ланцюгах компактних підмножин нульвимірного топологічного простору. Розглянуто узагальнення теореми Богатого (див. [68]), доведеної для випадку сім'ї з двох узгоджених ультраметрик. Зауважимо, що існування оператора продовження узгоджених сімей метрик доведено у [18].

Зафіксуємо компактний нульвимірний метризовний топологічний простір X. Нехай $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — довільна скінченна сім'я попарно різних непорожніх компактних підмножин множини X, а $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ — її нерв. Називатимемо сім'ю $\mathcal{A} \in \exp_f(\exp(X))$ ланцюгом компактних підмножин простору X, якщо нерв $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ є деревом, тобто зв'язним графом без циклів. Нехай

$$\mathcal{CH}(X) = \{\mathcal{A} \in \exp_f(\exp(X)) : \mathcal{N}(\mathcal{A}) \text{ є деревом } \} \text{ —}$$

множина всеможливих ланцюгів компактних підмножин простору X. Якщо $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — ланцюг, то множини $A_1, \ldots, A_n$ називаються його ланками. З означення ланцюга зрозуміло, що довільна сім'я його ланок, яка складається принаймні з трьох попарно різних елементів, має порожній перетин. Розглянемо множину

$$\mathcal{S} = \big\{\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \colon \rho_i \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A_i), A_i \in \exp(X),$$
$$\{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{CH}(X),\ \rho_i|_{(A_i \cap A_j)^2} = \rho_j|_{(A_i \cap A_j)^2},\ \text{якщо}$$
$$A_i \cap A_j \neq \varnothing,\ i, j \in \{1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\big\}$$

скінченних сімей неперервних ультраметрик, визначених на ланках ланцюгів в просторі X, які набувають однакових значень на перетинах ланок ланцюгів, тобто є узгодженими. Позначимо через

$\mathcal{S}(\mathcal{A})$ підмножину множини $\mathcal{S}$, яка складається з усіх сімей узгоджених неперервних ультраметрик, визначених на ланках фіксованого ланцюга $\mathcal{A} \in \mathcal{CH}(X)$. Оскільки кожну неперервну ультраметрику, визначену на компактній підмножині простору X, можна ототожнити з її графіком, який є компактною підмножиною простору $X \times X \times \mathbb{R}$, то множину $\mathcal{S}$ можна розглядати як підмножину множини $\exp_f(\exp(X \times X \times \mathbb{R}))$ з топологією В'єторіса, наділену топологією підпростору. Множину $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ всіх неперервних ультраметрик, визначених на елементах множини $\exp X$, теж наділимо топологією В'єторіса. Якщо r — метрика, що породжує топологію простору X, то метрика Гаусдорфа r_H породжує топологію простору $\exp X$. Вважатимемо, що на множині $X \times X \times \mathbb{R}$ задана l_1-метрика, яку теж будемо позначати літерою r. Отже,

$$r[(x, y, z), (x', y', z')] = r(x, x') + r(y, y') + |z - z'|$$

для будь-яких $x, y, x', y' \in X$ та $z, z' \in \mathbb{R}$. Так само через r_H будемо позначати метрики Гаусдорфа на множинах $\exp(X \times X \times \mathbb{R})$ та $\exp_f(\exp(X \times X \times \mathbb{R}))$.

Якщо сім'я $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$, $\mathrm{dom}(d_i) = A_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ належить множині $\mathcal{S}$, то будемо також використовувати літеру ρ для позначення комбінації відображень $\rho_1, \ldots, \rho_n$, тобто відображення

$$\rho\colon (A_1 \times A_1) \cup \cdots \cup (A_n \times A_n) \to \mathbb{R}$$

такого, що $\rho|_{A_i \times A_i} = \rho_i$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, пам'ятаючи при цьому області визначення всіх елементів сім'ї $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$. Якщо

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{CH}(X),$$

а $\rho = \{\rho_i\}_{i=1}^n$, $\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^n$ — дві сім'ї ультраметрик з $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, то сім'я відображень

$$\{\max\{\rho_i, \sigma_i\}, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

також належить множині $\mathcal{S}(\mathcal{A})$. Для довільних $(x, y) \in (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_n \times A_n)$ отримаємо

$$\max\{\rho, \sigma\}(x, y) = \max\{\rho_i(x, y), \sigma_i(x, y)\},\ (x, y) \in A_i \times A_i.$$

Твердження 5.5. *Нехай X — компактний нульвимірний метризовний топологічний простір. Існує відображення $v \colon \mathcal{S} \to \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$ яке продовжує довільну сім'ю $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \in \mathcal{S}$ до ультраметрики на множині $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\rho_i) \in \exp(X)$, тобто*

$$v(\rho)|_{\mathrm{dom}(\rho_i) \times \mathrm{dom}(\rho_i)} = \rho_i,\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{CH}(X)$ — фіксований ланцюг компактних підмножин простору X і нехай $Y = \bigcup \mathcal{A}$. Розглянемо довільну сім'ю $\rho = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Візьмемо довільні точки a і b, які належать різним ланкам ланцюга $\mathcal{A}$. Для визначеності нехай $a \in A_i \equiv A \in \mathcal{A}$, $b \in A_j \equiv B \in \mathcal{A}$, $i \neq j$. Тоді, оскільки нерв сім'ї $\mathcal{A}$ є деревом, то існує єдина скінченна сім'я $C_1, \ldots, C_{k-1}$ попарно різних ланок ланцюга $\mathcal{A}$ така, що

$$A \cap C_1 \neq \varnothing,\ C_1 \cap C_2 \neq \varnothing,\ \ldots,\ C_{k-2} \cap C_{k-1} \neq \varnothing,\ C_{k-1} \cap B \neq \varnothing.$$

Назвемо множину $\{C_1, \ldots, C_{k-1}\}$ шляхом від ланки A до ланки B ланцюга $\mathcal{A}$. Очевидно, що сім'я $\{C_1, \ldots, C_{k-1}\}$ також є ланцюгом. Розглянемо скінченну множину елементів

$$a = c_0,\ c_1 \in A \cap C_1,\ c_2 \in C_1 \cap C_2,\ \ldots,\ c_{k-1} \in C_{k-2} \cap C_{k-1},$$

$$c_k \in C_{k-1} \cap B,\ b = c_{k+1},$$

яку назвемо шляхом від точки a до точки b. Якщо $a \in A \cap C_1$, то приймемо $a = c_0 = c_1$, а у випадку $b \in C_{k-1} \cap B$ нехай $b = c_{k+1} = c_k$.

Візьмемо довільні елементи x, y множини Y такі, що $x \in A_i \in$

$\mathcal{A}$, $y \in A_j \in \mathcal{A}$. Означимо функцію $v(\rho)\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ за формулою

$$v(\rho)(x,y) = \begin{cases} \inf\{\max\{\rho(x,c_1), \rho(c_1,c_2), \dots, \rho(c_k,y)\}\} \text{ при } i \neq j; \\ v(\rho)(x,y) = \rho(x,y) \text{ при } i = j, \end{cases}$$

де інфімум береться по всеможливих множинах

$$\{x = c_0, c_1, \dots, c_k, c_{k+1} = y\}$$

з властивостями, описаними вище, тобто по всеможливих шляхах від точки x до точки y.

Доведемо за індукцією, що $v(\rho)$ — ультраметрика на множині Y. Для випадку, коли ланцюг $\mathcal{A}$ складається лише з двох ланок, дане твердження доведене Богатим у [68]. Припустимо, що $v(\rho)$ — ультраметрика у випадку, коли ланцюг $\mathcal{A}$ складається з $n-1$ ланок і $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$. Додамо будь-яку ланку $A \in \exp(X)$ до ланцюга $\mathcal{A}$ і задамо довільну ультраметрику $\rho' \in \mathcal{UM}_{\mathrm{c}}(A)$, узгоджену з сім'єю ультраметрик $\{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}\}$. Тоді

$$v(\{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho'\})(x,y) = v(\rho)(x,y)$$

для будь-яких $x, y \in \bigcup \mathcal{A}$. Отже, використовуючи результат Богатого, бачимо, що сім'ю $\{v(\rho), \rho'\}$ можна продовжити до ультраметрики $v(\{\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho'\})$ на множині $(\bigcup \mathcal{A}) \cup A$.

Доведемо, що ультраметрика $v(\rho)$ неперервна. Нехай x — довільна точка з множини Y, а $\{x_i\} \subset Y$ — довільна послідовність, яка збігається до x в просторі Y. Припустимо, що $x \in A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Тоді, якщо існує індекс $i_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_i \in A_j$ для всіх $i > i_0$, то $v(\rho)(x, x_i) = \rho_j(x, x_i)$ при $i > i_0$. Отже, за неперервністю ультраметрики ρ_j отримаємо $v(\rho)(x, x_i) \to 0,\ i \to \infty$. Тепер припустимо, що існують принаймні дві різні ланки A_k, A_m ланцюга $\mathcal{A}$, відмінні від ланки A_j, кожна з яких містить нескінченну кількість елементів послідовності $\{x_i\}$. Тоді з умови замкненості ланок $A_1, \ldots, A_n$ випливає, що $x \in A_j \cap A_k \cap A_m$, а це суперечить умові, що нерв сім'ї $\mathcal{A}$ є деревом. Отже, крім A_j щонайбільше одна відмінна від A_j ланка ланцюга $\mathcal{A}$ може містити нескінченну кількість елементів послідовності $\{x_i\}$, для визначеності A_m. Тоді існує індекс $i_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_i \in A_j$ або $x_i \in A_m$ для будь-яких $i > i_0$. Крім цього, $x \in A_j \cap A_m$. Тоді

$$v(\rho)(x, x_i) = \begin{cases} \rho_j(x_i, x), \text{ якщо } x_i \in A_j, \\ \rho_m(x_i, x), \text{ якщо } x_i \in A_m \end{cases}$$

для довільних $i > i_0$. З неперервності ультраметрик ρ_j, ρ_m випливає умова $v(\rho)(x_i, x) \to 0$, $i \to \infty$. Отже, $v(\rho)$ — неперервна ультраметрика на множині Y.

$\square$

Твердження 5.6. *Нехай $\{\rho_i, A_i\}_{i=1}^n$, $\{\sigma_i, A_i\}_{i=1}^n$ — дві сім'ї узгоджених неперервних ультраметрик, заданих на ланках $A_1, \ldots, A_n$ ланцюга $\mathcal{A}$. Нехай ρ, σ — комбінації відповідно першої та другої сімей ультраметрик. Тоді $v(\max\{\rho, \sigma\}) \geq \max\{v(\rho), v(\sigma)\}$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні точки $x, y \in Y = \bigcup \mathcal{A}$, $x \neq y$. Якщо елементи x, y належать одній ланці A_j ланцюга $\mathcal{A}$, то

$$v(\rho)(x, y) = \rho_j(x, y),\ v(\sigma)(x, y) = \sigma_j(x, y),$$

а отже,

$$\max\{v(\rho)(x, y), v(\sigma)(x, y)\} = v(\max\{\rho(x, y), \sigma(x, y)\}).$$

Тепер припустимо, що $x \in A_i = A \in \mathcal{A}$, $y \in A_j = B \in \mathcal{A}$, $i \neq j$. Можна єдиним чином підібрати скінченну послідовність попарно різних ланок $C_1, C_2, \ldots C_{k-1}$ ланцюга $\mathcal{A}$ таких, що $A \cap C_1 \neq \varnothing$, $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, $\ldots$, $C_{k-1} \cap B \neq \varnothing$. Крім цього, існують набори елементів

$$x = a_0,\ a_1 \in A \cap C_1,\ a_2 \in C_1 \cap C_2, \ldots, a_k \in C_{k-1} \cap B,$$

$$x = b_0,\ b_1 \in A \cap C_1,\ b_2 \in C_1 \cap C_2, \dots, b_k \in C_{k-1} \cap B,$$
$$x = c_0,\ c_1 \in A \cap C_1,\ c_2 \in C_1 \cap C_2, \dots, c_k \in C_{k-1} \cap B$$

такі, що

$$v(\rho)(x,y) = \max\{\rho(x,a_1),\ \rho(a_1,a_2),\ \dots,\ \rho(a_k,y)\},$$
$$v(\sigma)(x,y) = \max\{\sigma(x,b_1),\ \sigma(b_1,b_2),\ \dots,\ \sigma(b_k,y)\},$$
$$v(\max\{\rho,\sigma\})(x,y) = \max\{\max\{\rho(x,c_1),\sigma(x,c_1)\},$$
$$\max\{\rho(c_1,c_2),\sigma(c_1,c_2)\},\ \dots,\ \max\{\rho(c_k,y),\sigma(c_k,y)\}\}.$$

Тоді

$$\max\{v(\rho)(x,y), v(\sigma)(x,y)\} =$$
$$= \max\{\max\{\rho(x,a_1),\ \rho(a_1,a_2),\ \dots,\ \rho(a_k,y)\},$$
$$\max\{\sigma(x,b_1),\ \sigma(b_1,b_2),\ \dots,\ \sigma(b_k,y)\}\} \le$$
$$\le \max\{\max\{\rho(x,c_1),\ \rho(c_1,c_2),\ \dots, \rho(c_k,y)\},$$
$$\max\{\sigma(x,c_1),\ \sigma(c_1,c_2),\ \dots,\ \sigma(c_k,y)\}\} =$$
$$\max\{\max\{\rho(x,c_1),\sigma(x,c_1)\},\ \max\{\ \rho(c_1,c_2),\sigma(c_1,c_2)\},\ \dots,$$
$$\max\{\rho(c_k,y),\sigma(c_k,y)\}\} = v(\max\{\rho,\sigma\})(x,y).$$

$\square$

Наведемо приклад, коли дана нерівність є строгою.

Приклад 1. Нехай $A_1 = \{a,x,y,z\}$, $A_2 = \{b,x,y,z\}$, $a \neq b$ і $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$. Тоді $A_1 \cap A_2 = \{x,y,z\}$. Виберемо дві пари узгоджених ультраметрик $\{\rho_1,\rho_2\}$ та $\{\sigma_1,\sigma_2\}$, заданих на відповідних ланках ланцюга $\mathcal{A}$, так:

$$\rho_1(a,z) = \rho_1(y,z) = \rho_2(y,z) = \rho_1(x,z) = \rho_2(x,z) = \rho_2(b,z) = 3,$$

$$\rho_1(a,y) = \rho_1(y,x) = \rho_2(y,x) = \rho_2(b,y) = 2,\ \rho_1(a,x) = \rho_2(b,x) = 1;$$

$$\sigma_1(a,x)=\sigma_1(x,y)=\sigma_2(x,y)=\sigma_1(x,z)=\sigma_2(x,z)=\sigma_2(b,x)=3,$$
$$\sigma_1(a,y)=\sigma_1(y,z)=\sigma_2(y,z)=\sigma_2(b,y)=2,\ \sigma_1(a,z)=\sigma_2(b,z)=1.$$

Нехай ρ,σ — комбінації відповідно пари $\{\rho_1,\rho_2\}$ та пари $\{\sigma_1,\sigma_2\}$. Тоді

$$v(\rho)(a,b)=\min\{\max\{\rho(a,x),\rho(x,b)\},\max\{\rho(a,y),\rho(y,b)\},$$
$$\max\{\rho(a,z),\rho(z,b)\}\}=\min\{\max\{1,1\},\max\{2,2\},\max\{3,3\}\}=1;$$
$$v(\sigma)(a,b)=\min\{\max\{\sigma(a,x),\sigma(x,b)\},\max\{\sigma(a,y),\sigma(y,b)\},$$
$$\max\{\sigma(a,z),\sigma(z,b)\}\}=\min\{\max\{3,3\},\max\{2,2\},\max\{1,1\}\}=1;$$
$$v(\max\{\rho,\sigma\})(a,b)=$$
$$=\min\{\max\{\max\{\rho(a,x),\sigma(a,x)\},\max\{\rho(x,b),\sigma(x,b)\}\},$$
$$\max\{\max\{\rho(a,y),\sigma(a,y)\},\max\{\rho(y,b),\sigma(y,b)\}\},$$
$$\max\{\max\{\rho(a,z),\sigma(a,z)\},\max\{\rho(z,b),\sigma(z,b)\}\}\}=$$
$$=\min\{\max\{\max\{1,3\},\max\{1,3\}\},\max\{\max\{2,2\},\max\{2,2\}\},$$
$$\max\{\max\{3,1\},\max\{3,1\}\}\}=2.$$

Отже, $v(\max\{\rho,\sigma\})(a,b)=2>\max\{v(\rho)(a,b),v(\sigma)(a,b)\}=1.$

Приклад 2. Доведемо, що оператор $v\colon \mathcal{S}\to\mathcal{UM}_c$, взагалі кажучи, не є неперервним. Нехай r — фіксована метрика, яка породжує топологію простору X. Вважаємо, що метричний простір (X,r) не є дискретним. Доведемо існування сім'ї ρ та послідовності $\{\rho^k\}$ сімей ультраметрик з множини $\mathcal{S}$ таких, що $\{\rho^k\}$ збігається до ρ в просторі $\mathcal{S}$, але $v(\rho^k)$ не збігається до $v(\rho)$ в просторі $\mathcal{UM}_c$. Розглянемо ланцюг $\mathcal{A}=\{A_1,A_2\}$ в просторі X, де $A_1=\{a,b,c,d,g\}$, $A_2=\{b,d,e,f\}$. Припустимо, що кожна точка з множини $A_1\cup A_2$ не є ізольованою і що $r(x,y)>1$ при $x\neq y$, $x,y\in A_1\cup A_2$. Задамо на множинах A_1 та A_2 сім'ю $\rho=\{\rho_1,\rho_2\}$ узгоджених ультраметрик, значення яких такі:

ρ_1	a	b	c	d	g
a	0	1	2	1	2
b	1	0	2	1	2
c	2	2	0	2	2
d	1	1	2	0	2
g	2	2	2	2	0

ρ_2	b	d	e	f
b	0	1	1	1
d	1	0	1	1
e	1	1	0	1
f	1	1	1	0

Тоді

$$v(\rho)(a,e) = \min\{\max\{\rho_1(a,b), \rho_2(b,e)\}, \max\{\rho_1(a,d), \rho_2(d,e)\}\} = 1.$$

Тепер задамо елементи послідовності $\{\rho^k\}$. Припустимо, що

$$\rho^k = \{\rho_1^k, \rho_2^k, \rho_3^k\},\ \mathrm{dom}\rho_i^k = B_i^k,\ i \in \{1,2,3\},\ k \in \mathbb{N},$$

де $B_1^k = \{a, b, c, d, g_k\}$, $B_2^k = \{a_k, b_k, c, d_k, g_k\}$, $B_3^k = \{b_k, d_k, e, f\}$. Тут a_k, b_k, d_k, g_k такі, що

$$r(a_k, a) < \frac{1}{k},\ r(b_k, b) < \frac{1}{k},\ r(d_k, d) < \frac{1}{k},\ r(g_k, g) < \frac{1}{k}$$

і

$$a \neq a_k,\ b \neq b_k,\ d \neq d_k,\ g \neq g_k$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$. Нижче подані значення ультраметрик ρ_1^k, ρ_2^k та ρ_3^k:

ρ_1^k	a	b	c	d	g_k
a	0	1	2	1	2
b	1	0	2	1	2
c	2	2	0	2	2
d	1	1	2	0	2
g_k	2	2	2	2	0

ρ_2^k	a_k	b_k	c	d_k	g_k
a_k	0	1	2	1	2
b_k	1	0	2	1	2
c	2	2	0	2	2
d_k	1	1	2	0	2
g_k	2	2	2	2	0

ρ_3^k	b_k	d_k	e	f
b_k	0	1	1	1
d_k	1	0	1	1
e	1	1	0	1
f	1	1	1	0

Оскільки послідовності графіків ультраметрик $\{\rho_1^k\}$ та $\{\rho_2^k\}$ збігаються до графіка ультраметрики ρ_1, а послідовність графіків ультраметрик $\{\rho_3^k\}$ збігається до графіка ультраметрики ρ_2 відносно метрики Гаусдорфа на множині $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$, то сім'я $\{\rho_1^k, \rho_2^k, \rho_3^k\}$ збігається до сім'ї $\{\rho_1, \rho_2\}$ відносно метрики Гаусдорфа на множині $\mathcal{S} \subset \exp_f(\exp(X \times X \times \mathbb{R}))$. За означенням оператора продовження для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$v(\rho^k)(a,e) = \min \big\{ \max\{\rho_1^k(a,c), \rho_2^k(c,b_k), \rho_3^k(b_k,e)\},$$

$$\max\{\rho_1^k(a,c), \rho_2^k(c,d_k), \rho_3^k(d_k,e)\}, \max\{\rho_1^k(a,g_k), \rho_2^k(g_k,b_k), \rho_3^k(b_k,e)\},$$

$$\max\{\rho_1^k(a,g_k), \rho_2^k(g_k,d_k), \rho_3^k(d_k,e)\}\big\} =$$

$$= \min\{\max\{2,2,1\}, \max\{2,2,1\}, \max\{2,2,1\}, \max\{2,2,1\}\} = 2.$$

Отже, точка $(a,e,2)$ належить графіку ультраметрики $v(\rho^k)$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Оскільки всі точки a, b, c, d, g, e, f лежать на відстані більшій, ніж 1 одна від одної відносно метрики r на множині X, то точка $(a,e,1)$ реалізує відстань від точки $(a,e,2)$ до графіка ультраметрики $v(\rho)$. Оскільки точка $(a,e,2)$ належить графіку ультраметрики $v(\rho^k)$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, бачимо, що послідовність $v(\rho^k)$ не збігається до ультраметрики $v(\rho)$ у просторі $\mathcal{UM}_{\mathrm{c}}$. Отже, взагалі кажучи, оператор v не є неперервним.

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай $\mathcal{A}$ — ланцюг компактних підмножин нульвимірного метризовного топологічного простору X, $A_1, \ldots, A_n$ — його ланки. Тоді для кожної сім'ї $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ неперервних узгоджених ультраметрик, визначених на ланках ланцюга $\mathcal{A}$, існує неперервна ультраметрика $v(\rho)$, визначена на множині $\bigcup \mathcal{A}$ така, що $v(\rho)|_{A_i \times A_i} = \rho_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (тут ρ — комбінація ультраметрик $\rho_1, \ldots, \rho_n$). Крім цього, якщо $\{\rho^i, A_i\}_{i=1}^n$, $\{\sigma^i, A_i\}_{i=1}^n$ — дві сім'ї узгоджених неперервних ультраметрик, заданих на ланках*

$A_1, \ldots, A_n$ ланцюга $\mathcal{A}$, а ρ, σ — комбінації відповідно першої та другої сімей, то $v(\max\{\rho, \sigma\}) \geq \max\{v(\rho), v(\sigma)\}$.

Доведення. Твердження 5.5 та 5.6 складають доведення теореми. □

Оскільки за теоремою 5.1 ультраметрику $v(\rho)$ можна продовжити до неперервної ультраметрики на всьому просторі X, то справедливим є наступне твердження.

Теорема 5.3. *Нехай $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — ланцюг замкнених підмножин нульвимірного сепарабельного метризовного простору X, $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ — сім'я неперервних узгоджених ультраметрик, визначених на ланках ланцюга $\mathcal{A}$. Тоді існує неперервна ультраметрика $\widetilde{\rho}$ на X така, що $\widetilde{\rho}|_{A_i \times A_i} = \rho_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Зауважимо, що в означенні ланцюга компактних (замкнених) підмножин простору X припущення того, що нерв $N(\mathcal{A})$ сім'ї $\mathcal{A} \in \exp_f(\exp(X))$ є деревом, суттєве. Доведемо, що існує скінченна сім'я підмножин простору X, нерв якої є зв'язним графом з присутніми циклами і оператор v не можна застосувати для продовження узгоджених сімей ультраметрик, визначених на елементах цієї сім'ї. Оскільки в графі присутні цикли, то можна знайти принаймні дві різні ланки відповідного ланцюга такі, що для них існують хоча б два різні шляхи від одної з них до іншої. При цьому вважаємо, що в означенні оператора v інфімум береться по всеможливих шляхах.

Приклад 3. Нехай $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ — сім'я підмножин простору X така, що

$$B_1 = \{a, b, c, x, y\}, \ B_2 = \{b, y, d, e, f\}, \ B_3 = \{c, x, e, f, z\}.$$

Тоді $B_1 \cap B_2 = \{b, y\}$, $B_2 \cap B_3 = \{e, f\}$, $B_1 \cap B_3 = \{c, x\}$, тобто присутній цикл, тому нерв $\mathcal{N}(\mathcal{B})$ не є деревом. Нехай $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ —

сім'я неперервних узгоджених ультраметрик, визначених на елементах множини $\mathcal{B}$. Задамо значення ультраметрик ρ_1, ρ_2, ρ_3 на множинах B_1, B_2, B_3 відповідно:

ρ_1	a	b	c	x	y
a	0	1	1	1	1
b	1	0	1	1	1
c	1	1	0	1	1
x	1	1	1	0	1
y	1	1	1	1	0

ρ_2	b	y	d	e	f
b	0	1	1	2	1
y	1	0	1	2	1
d	1	1	0	2	1
e	2	2	2	0	2
f	1	1	1	2	0

ρ_3	c	x	e	f	z
c	0	1	2	2	2
x	1	0	2	2	2
e	2	2	0	2	2
f	2	2	2	0	1
z	2	2	2	1	0

Тоді $v(\rho)(x,y) = \rho_1(x,y) = 1$, $v(\rho)(x,z) = \rho_3(x,z) = 2$ і

$$v(\rho)(y,z) =$$

$$= \min\Big\{ \max\{\rho_2(y,f), \rho_3(f,z)\}, \max\{\rho_2(y,e), \rho_3(e,z)\},$$
$$\max\{\rho_1(y,x), \rho_3(x,z)\}, \max\{\rho_1(y,c), \rho_3(c,z)\}\Big\} =$$
$$= \min\Big\{ \max\{1,1\}, \max\{2,2\}, \max\{1,2\}, \max\{1,2\}\Big\} = 1.$$

Отже,

$$v(\rho)(x,z) = 2 > \max\{v(\rho)(x,y), v(\rho)(y,z)\} = 1,$$

а тому відображення $v(\rho)\colon (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \times (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \to \mathbb{R}$ не є ультраметрикою.

5.3. Продовження псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірного простору

У цьому підрозділі розглянемо оператор продовження часткових псевдометрик, означених на замкнених підмножинах нульвимірного метризовного локально компактного топологічного простору. Подібно як і в [63] будемо використовувати теорему Майкла про селекцію для багатозначних відображень у нульвимірному випадку.

Нехай X — локально компактний нульвимірний сепарабельний метризовний топологічний простір і нехай d — метрика, що породжує топологію на X. Для кожного $A \in \mathrm{CL}(X)$ розглянемо множину $\mathcal{PM}_\mathrm{c}(A)$ неперервних псевдометрик, заданих на A, а також множину всіх часткових псевдометрик

$$\mathcal{PM}_\mathrm{c} = \bigcup \{\mathcal{PM}_\mathrm{c}(A) : A \in \mathrm{CL}(X),\ |A| \geq 2\}.$$

Введемо топологію Фелла на множині часткових псевдометрик $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ простору X. Кожну псевдометрику σ з $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ ототожнимо з її графіком

$$\Gamma_\sigma = \{(x, y, t) \in \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathbb{R}_+ : t = \sigma(x, y)\}$$

і будемо розглядати простір $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ як підпростір простору $(\mathrm{CL}(X \times X \times \mathbb{R}), \mathcal{T}_F)$. Оскільки простір $X \times X \times \mathbb{R}$ локально компактний і сепарабельний, то існує метрика d_F, що породжує топологію простору $(\mathcal{PM}_\mathrm{c}, \mathcal{T}_F)$. Вважаємо, що множина $\mathcal{PM}_\mathrm{c}(X)$ також наділена топологією Фелла.

Сім'я

$$\mathcal{F}(X) = \{[X, U, a, b]^- : U \text{ — відкрита в } X \times X,\ a, b \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\cup \{[X, K, a, b]^+ : K \text{ — компактна в } X \times X,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

утворює передбазу топології Фелла на множині $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$. Тоді для кожного $A \in \mathrm{CL}(X)$ передбазою топології Фелла на $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$ є сім'я

$$\mathcal{F}(A) = \{[A, U, a, b]^{-} : U \text{ — відкрита в } A \times A, a, b \in \mathbb{R}\} \cup$$
$$\cup \{[A, K, a, b]^{+} : K \text{ — компактна в } A \times A, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Для довільної множини $A \in \mathrm{CL}(X)$ та дійсного числа $T > 0$ множину $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^{T}(A)$ всіх псевдометрик з $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$, обмежених числом T, наділимо топологією підпростору. Тоді множину

$$\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^{T} = \bigcup \{\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^{T}(A) : A \in \mathrm{CL}(X),\ |A| \geq 2\}$$

можна розглядати як підпростір простору $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}$.

Для кожного $A \in \mathrm{CL}(X)$ розглянемо множину $\mathcal{PM}_{uec}(A)$ всіх псевдометрик з $\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(A)$, одностайно рівномірно неперервних на компактних підмножинах простору A. Останнє означає, що для довільних $\varepsilon > 0$ та компактної підмножини K простору $A \times A$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких $\rho \in \mathcal{PM}_{uec}(A)$, $(x_1, y_1) \in K$ і $(x_2, y_2) \in A \times A$ таких, що $d(x_1, x_2) < \delta$ і $d(y_1, y_2) < \delta$, маємо $|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Припустимо, що множина $\mathcal{PM}_{uec}(A)$ наділена топологією підпростору і нехай

$$\mathcal{PM}_{uec} = \bigcup \{\mathcal{PM}_{uec}(A) : A \in \mathrm{CL}(X),\ |A| \geq 2\}.$$

Наступне твердження встановлює одну властивість гіперпростору $(\mathrm{CL}(X), \mathcal{T}_F)$.

Твердження 5.7. *Нехай X — локально компактний нульвимірний метризовний топологічний простір. Тоді простір $(\mathrm{CL}(X), \mathcal{T}_F)$ нульвимірний.*

Доведення. Оскільки X нульвимірний, то існує база топології простору X, яка складається з відкрито-замкнених підмножин простору X. Оскільки X локально компактний, то існує база простору X, що складається з множин які мають компактні замикання. Нехай $A \in \mathrm{CL}(X)$ — довільна множина і

$$W = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} V_j^+\right) \text{ —}$$

елемент бази простору $(\mathrm{CL}(X), \mathcal{T}_F)$, який містить множину A. Тут всі множини U_i — відкриті в X, а всі множини V_j — відкриті в X і мають компактні доповнення. Потрібно довести, що існує відкрито-замкнена множина W' у $\mathrm{CL}(X)$ така, що $A \in W' \subset W$. Зафіксуємо довільне число $i \in \{1, \ldots, n\}$. Оскільки $A \cap U_i \neq \varnothing$, то існує точка $x_i \in A \cap U_i$. Оскільки множина U_i відкрита, то можна знайти відкрито-замкнену підмножину B_i простору X таку, що $x_i \in B_i \subset U_i$. Оскільки B_i відкрита, то існує відкрита множина B_i' з компактним замиканням така, що $x_i \in B_i' \subset B_i$. Тоді отримаємо $\overline{B_i'} \subseteq B_i$, бо множина B_i замкнена. Нарешті можна знайти відкрито-замкнену множину B_i'' таку, що $x_i \in B_i'' \subset B_i' \subset \overline{B_i'}$. Тоді B_i'' — компактна відкрито-замкнена підмножина простору X. Оскільки $x_i \in B_i'' \cap U_i$, отримаємо $A \in B_i''^-$ для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Тепер зафіксуємо довільне число $j \in \{1, \ldots, m\}$. Існує відкрито-замкнена множина C_j така, що $V_j^c \subset C_j$ і $A \subset C_j^c$. Нехай $y \in V_j^c$ — довільна точка. Тоді можна знайти окіл $C_j'(y)$ точки y такий, що множина $\overline{C_j'(y)}$ компактна і $y \in C_j'(y) \subset \overline{C_j'(y)} \subseteq C_j$. Подібно, як і в попередньому випадку виберемо відкрито-замкнену множину $C_j''(y)$ таку, що $y \in C_j''(y) \subset C_j'(y) \subset \overline{C_j'(y)}$. Тоді множина $C_j''(y)$ компактна і відкрито-замкнена. Покриття $\{C_j''(y) : y \in V_j^c\}$ множини V_j^c містить скінченне підпокриття $\{C_j''(y_1), \ldots, C_j''(y_k)\}$ множини V_j^c. Отримаємо $V_j^c \subset \cup_{l=1}^{k} C_j''(y_l) \equiv D_j \subset C_j$. Очевидно, D_j — компактна відкрито-замкнена підмножина простору X. Тепер нехай

$$W' = \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i''^-\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} (D_j^c)^+\right).$$

Оскільки $A \subset D_j^c$ для всіх $j \in \{1, \ldots, m\}$ і $A \cap B_i'' \neq \varnothing$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, бачимо, що $A \in W'$. Щоб довести, що $W' \subset W$ візьмемо довільний елемент $B \in W'$. Тоді множина B перетинає B_i'' для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$, а отже B перетинає U_i для кожного i. Оскільки B не перетинає D_j для кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$, бачимо, що $B \subset V_j$ для кожного j. Звідси $B \in W$. Залишилося довести, що множина W' відкрито-замкнена у просторі $\mathrm{CL}(X)$. Доповнення до множини W' у $\mathrm{CL}(X)$ складається з усіх множин з $\mathrm{CL}(X)$, які не перетинають множин B_i'' для деяких індексів i та (або) перетинають множини D_j для деяких індексів j. Оскільки кожна з множин B_i'' компактна і кожна з множин D_j відкрита, бачимо, що множина W'^c відкрита. Отже, W' — відкрито-замкнена. $\square$

Тепер означимо багатозначне відображення

$$G\colon X \times \mathrm{CL}(X) \to \mathcal{Q}(X)$$

формулою

$$G(x, A) = \begin{cases} A, & \text{якщо } x \notin A, \\ \{x\}, & \text{якщо } x \in A. \end{cases}$$

Твердження 5.8. *Багатозначне відображення G напівнеперервне знизу.*

Доведення. Доведемо, що для будь-якої відкритої підмножини V простору X множина

$$V^* = \{(x, A) \in X \times \mathrm{CL}(X) : G(x, A) \cap V \neq \varnothing\}$$

відкрита в $X \times \mathrm{CL}(X)$. Зафіксуємо довільну точку $(x_0, A_0) \in V^*$ і розглянемо два випадки.

1) Нехай $x_0 \notin A_0$. Тоді $G(x_0, A_0) = A$ і $A \cap V \neq \varnothing$. Можна знайти окіл U точки x_0 такий, що множина $\overline{U}$ — компактна і $\overline{U} \cap A_0 = \varnothing$. Тоді множина

$$W = U \times \left[V^- \cap \left(\overline{U}^c\right)^+\right]$$

є околом точки (x_0, A_0) в $X \times \mathrm{CL}(X)$. Для кожної точки $(x, A) \in W$ маємо $x \notin A$ і $A \cap V \neq \varnothing$. Оскільки $G(x, A) = A$, то $(x, A) \in V^*$.

2) Нехай $x_0 \in A_0$. Тоді $G(x_0, A_0) = \{x_0\}$ і $x_0 \in V$. Очевидно, що множина $W = V \times V^-$ є околом точки (x_0, A_0) в $X \times \mathrm{CL}(X)$. Виберемо довільну точку $(x, A) \in W$. Якщо $x \in A$, то $G(x, A) = \{x\} \subset V$. Якщо ж $x \notin A$, то $G(x, A) = A$ і $A \cap V \neq \varnothing$. Отже, $(x, A) \in V^*$ і твердження доведено. $\square$

Оскільки простір $\mathrm{CL}(X)$ сепарабельний і метризовний, то

$$\mathrm{ind}(\mathrm{CL}(X)) = \dim(\mathrm{CL}(X)) = \mathrm{Ind}(\mathrm{CL}(X)) = 0.$$

Отже, $\dim(X \times \mathrm{CL}(X)) = 0$ і за теоремою 2.2 існує неперервна селекція $g\colon X \times \mathrm{CL}(X) \to X$ відображення G. Означимо оператор $h\colon \mathcal{PM}_\mathrm{c} \to \mathbb{R}^{X \times X}$ за формулою

$$h(\sigma)(x, y) = \sigma(g(x, \mathrm{dom}(\sigma)), g(y, \mathrm{dom}(\sigma))) \text{ для будь-яких } x, y \in X.$$

Твердження 5.9. *Відображення $h(\sigma)$ — неперервна псевдометрика на X для кожного $\sigma \in \mathcal{PM}_\mathrm{c}$.*

Доведення. Очевидно, що $h(\sigma)$ — псевдометрика, задана на X. Оскільки відображення g неперервне, то $h(\sigma) \in \mathcal{PM}_\mathrm{c}(X)$. $\square$

Твердження 5.10. *Оператор h продовжує псевдометрики з $\mathcal{PM}_\mathrm{c}$ на простір X.*

Доведення. Твердження випливає з властивостей селекції g. Якщо $\sigma \in \mathcal{PM}_{\text{c}}$ і $x, y \in \text{dom}(\sigma)$, то $g(x, \text{dom}(\sigma)) = x$ і $g(y, \text{dom}(\sigma)) = y$. Отже, $h(\sigma)(x, y) = \sigma(x, y)$. $\square$

Твердження 5.11. *Оператор $h_T = h|_{\mathcal{PM}_{\text{c}}^T} \colon \mathcal{PM}_{\text{c}}^T \to \mathcal{PM}_{\text{c}}^T(X)$ (звуження відображення h на множину $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T$) неперервний для довільного $T > 0$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне число $T > 0$ і розглянемо прообрази елементів передбази простору $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T(X)$.

1) Нехай K — довільна компактна підмножина простору $X \times X$, $a < b$ — дійсні числа. Розглянемо елемент передбази $[X, K, a, b]^+$ простору $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T(X)$. Доведемо, що множина $h_T^{-1}([X, K, a, b]^+)$ відкрита в $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T$. Виберемо псевдометрику $\sigma \in h_T^{-1}([X, K, a, b]^+)$ і позначимо $\text{dom}(\sigma) = B_0$. Тоді

$$h_T(\sigma)(x, y) = \sigma(g(x, B_0), g(y, B_0)) \notin [a, b]$$

для будь-яких $(x, y) \in K$. Оскільки K — компактна множина і g — неперервне відображення, то множина

$$K' = \{(g(x, B_0), g(y, B_0)) \in B_0 \times B_0 : (x, y) \in K\}$$

є компактною підмножиною простору $B_0 \times B_0$. Очевидно, що множина $W = [B_0, K', a, b]^+$ є околом псевдометрики σ в просторі $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T(B_0)$, а отже, в $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T$. Виберемо довільний елемент $\rho \in W$. Тоді для кожної точки $(x, y) \in K$ маємо

$$h_T(\rho)(x, y) = \rho(g(x, B_0), g(y, B_0)) \notin [a, b].$$

Звідси $h_T(\rho) \in [X, K, a, b]^+$, тобто множина $h_T^{-1}([X, K, a, b]^+)$ є відкритою в просторі $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T(B_0)$, а отже і в $\mathcal{PM}_{\text{c}}^T$.

2) Тепер виберемо довільну відкриту підмножину U в просторі $X \times X$, дійсні числа $a < b$ і розглянемо елемент передбази $[X, U, a, b]^-$

простору $\mathcal{PM}_c^T(X)$. Доведемо, що множина $h_T^{-1}([X, U, a, b]^-)$ відкрита в $\mathcal{PM}_c^T$. Нехай $\sigma \in h_T^{-1}([X, U, a, b]^-)$ і $\mathrm{dom}(\sigma) = B_0$. Тоді $h_T(\sigma) \in [X, U, a, b]^-$ і можна знайти точку $(x_0, y_0) \in U$ таку, що

$$h_T(\sigma)(x_0, y_0) = \sigma(g(x_0, B_0), g(y_0, B_0)) \in (a, b).$$

Оскільки функція $h_T(\sigma)$ неперервна, то існує окіл $V \subset U$ точки (x_0, y_0) такий, що $h_T(\sigma)(x, y) \in (a, b)$ для всіх $(x, y) \in V$. Більш того, множину V можна вибрати компактною. Тоді множина

$$K' = \{(g(x, B_0), g(y, B_0)) \in B_0 \times B_0 : (x, y) \in V\}$$

є компактною підмножиною простору $B_0 \times B_0$. Очевидно, що множина

$$W = [B_0, K', \min\{0, a-1\}, a]^+ \cap [B_0, K', b, \max\{T, b+1\}]^+$$

є околом псевдометрики σ в $\mathcal{PM}_c^T(B_0)$. Зафіксуємо довільну псевдометрику $\rho \in W$. Тоді для кожної точки $(x, y) \in V$ отримаємо $(g(x, B_0), g(y, B_0)) \in K'$, а отже, $a < \rho(g(x, B_0), g(y, B_0)) < b$. Звідси отримаємо $h_T(\rho) \in [X, K, a, b]^-$. $\square$

Твердження 5.12. *Оператор $h' = h|_{\mathcal{PM}_{uec}} \colon \mathcal{PM}_{uec} \to \mathcal{PM}_c(X)$ (звуження відображення h на простір $\mathcal{PM}_{uec}$) неперервний.*

Доведення. Так само, як і в доведенні попереднього твердження переконаємося, що прообрази елементів передбази топології простору $\mathcal{PM}_c(X)$ відкриті в просторі $\mathcal{PM}_{uec}$.

1) Нехай K — довільна компактна підмножина в $X \times X$, a, b — дійсні числа, $a < b$. Доведення факту, що прообраз кожного елемента передбази $[X, K, a, b]^+$ простору $\mathcal{PM}_c(X)$ відкритий у $\mathcal{PM}_{uec}$ є подібним до міркувань, проведених в попередньому твердженні.

2) Нехай U — довільна відкрита підмножина простору $X \times X$ і $a < b$ — дійсні числа. Розглянемо елемент передбази $[X, U, a, b]^-$ топології простору $\mathcal{PM}_c(X)$. Якщо $\sigma \in h'^{-1}([X,U,a,b]^-)$, $\mathrm{dom}(\sigma) = B_0$, то існує точка $(x_0,y_0) \in U$ така, що $\sigma(g(x_0,B_0),g(y_0,B_0)) \in (a,b)$. Можна знайти число $\varepsilon > 0$ і компактний окіл $V \subset U$ точки (x_0,y_0) такі, що $a+\varepsilon < h'(\sigma)(x,y) < b-\varepsilon$ для всіх $(x,y) \in V$. Нехай

$$K' = \{(g(x,B_0),g(y,B_0)) \in B_0 \times B_0 : (x,y) \in V\}.$$

Тоді K' — компактна підмножина множини $B_0 \times B_0$ і $\sigma(x,y) \in (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ для будь-яких $(x,y) \in K'$. Існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $\rho \in \mathcal{PM}_{uec}(B_0)$, $(x_1,y_1) \in K'$ та $(x_2,y_2) \in B_0 \times B_0$ таких, що $d(x_1,x_2) < \delta$ і $d(y_1,y_2) < \delta$, виконується нерівність $|\rho(x_1,y_1) - \rho(x_2,y_2)| < \varepsilon/4$. Оскільки K' компактна, то можна знайти окіл V' множини K' в просторі $B_0 \times B_0$ такий, що $\sigma(x,y) \in (a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2)$ для довільної точки $(x,y) \in V'$. Більш того, можна вибрати окіл V' так, щоб для кожної точки $(x,y) \in V'$ існувала точка $(x',y') \in K'$ така, що $d(x,x') < \delta$ і $d(y,y') < \delta$. Нехай $W = [B_0, V', a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2]^-$. Очевидно, що W — окіл псевдометрики σ в $\mathcal{PM}_{uec}(B_0)$, а отже, в $\mathcal{PM}_{uec}$. Зафіксуємо довільний елемент $\rho \in W$. Тоді існує точка $(x',y') \in V'$ така, що $\rho(x',y') \in (a+\varepsilon/2, b-\varepsilon/2)$. Також можна знайти точку $(x^*,y^*) \in V$, для якої виконуються умови $d(x', g(x^*,B_0)) < \delta$ і $d(y', g(y^*,B_0)) < \delta$. Отримаємо $|\rho(x',y') - \rho(g(x^*,B_0), g(y^*,B_0))| < \varepsilon/4$. Остання нерівність означає, що $h'(\rho)(x^*,y^*) \in (a,b)$. Твердження доведено. $\square$

Отже, справедливою є наступна теорема.

Теорема 5.4. *Нехай X — локально компактний метризовний нуль-вимірний топологічний простір. Тоді існує оператор $h\colon \mathcal{PM}_c \to \mathcal{PM}_c(X)$, який володіє наступними властивостями для будь-яких $\sigma, \sigma_1 \in \mathcal{PM}_c$ та $\lambda, \lambda_1 \geq 0$:*

1) $h(\sigma)$ — продовження псевдометрики σ на X;

2) для довільного $T > 0$ звуження $h|_{\mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^T} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}^T(X)$ неперервне.

3) звуження $h|_{\mathcal{PM}_{uec}} \to \mathcal{PM}_{\mathrm{c}}(X)$ неперервне.

4) $h(\lambda\sigma + \lambda_1\sigma_1) = \lambda h(\sigma) + \lambda_1 h(\sigma_1)$, якщо $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\sigma_1)$.

Доведення. Умова 4) є простим наслідком конструкції оператора h. Твердження 5.9 - 5.12 становлять доведення решти умов теореми.

$\square$

5.4. Оператор продовження грубо рівномірних метрик

У даному підрозділі доведемо існування оператора продовження підкласу класу грубо рівномірних метрик, заданих на замкненій підмножині власного метричного простору. Отриманий результат є аналогом теореми М. М. Зарічного [69] про продовження асимптотично ліпшицевих метрик, заданих на замкненій підмножині власного метричного простору.

Означення 5.1. *Метрика ρ, визначена на метричному просторі (X, d), називається асимптотично ліпшицевою, якщо існують числа $c, t > 0$ такі, що $\rho(x, y) \leq cd(x, y) + t$ для всіх $x, y \in X$.*

У [69] доведено наступне твердження.

Теорема 5.5. *Нехай A — замкнена підмножина власного метричного простору (X, d). Тоді довільну неперервну власну асимптотично ліпшицеву метрику ρ, визначену на множині A, можна продовжити до неперервної асимптотично ліпшицевої метрики на X. Крім цього, продовження індукує вихідну топологію простору X.*

Узагальненням поняття асимптотично ліпшицевої метрики є поняття грубо рівномірної метрики.

Означення 5.2. *Метрика ρ, визначена на метричному просторі (X, d), називається грубо рівномірною, якщо існує функція*

$$\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

така, що $\rho(x, y) \leq \varphi(d(x, y))$ для довільних $x, y \in X$.

Доведемо аналог теореми 5.5 для деякого класу грубо рівномірних метрик на множині A.

Теорема 5.6. *Нехай A — замкнена підмножина власного метричного простору (X, d). Нехай ρ — неперервна метрика, задана на множині A, для якої існують функція $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ та ввігнута неперервна неспадна функція*

$$\psi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty),\ \psi(0) = 0,\ \psi(t) > 0,\ t > 0,$$

такі, що $\rho(x, y) \le \varphi(d(x, y))$ для будь-яких $x, y \in A$ і $\varphi(t) \le \psi(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Тоді метрику ρ можна неперервно продовжити до грубо рівномірної метрики $\widetilde{\rho}$ на X, яка індукує вихідну топологію простору X.

Доведення. Розглянемо функцію $d'\colon X \times X \to \mathbb{R}$, визначену формулою $d'(x, y) = \psi(d(x, y))$. Легко перевірити, що d' — метрика на X. Справді, $d'(x, x) = \psi(0) = 0$ і $d'(x, y) = d'(y, x)$ для довільних $x, y \in X$. Крім цього, для довільних $x, y, z \in X$ отримаємо

$$d'(x, y) = \psi(d(x, y)) \le \psi(d(x, z) + d(z, y)) \le$$
$$\le \psi(d(x, z)) + \psi(d(z, y)) = d'(x, z) + d'(z, y).$$

Отже, d' — неперервна метрика на X і

$$\rho(x, y) \le \varphi(d(x, y)) \le \psi(d(x, y)) = d'(x, y)$$

для довільних $x, y \in A$. Тепер розглянемо функцію $\rho'\colon X \times X \to \mathbb{R}$, означену за формулою

$$\rho'(x, y) = \min\{d'(x, a) + \rho(a, b) + d'(b, y) : a, b \in A\},\ x, y \in X.$$

Аналогічно, як і в [69] можна довести, що функція ρ' неперервна, симетрична і задовольняє нерівність трикутника. Приймемо

$$\widetilde{\rho}(x, y) = \min\{d'(x, y), \rho'(x, y)\},\ x, y \in X.$$

Доведення того, що $\widetilde{\rho}$ — неперервне продовження метрики ρ на X таке ж саме, як і в [69]. Оскільки $\widetilde{\rho}(x, y) \le d'(x, y) = \psi(d(x, y))$, бачимо, що метрика $\widetilde{\rho}$ грубо рівномірна.

Доведемо, що $\widetilde{\rho}$ індукує вихідну топологію простору X. Нехай $\{x_n\}$ — довільна послідовність елементів простору X, яка збігається до деякого елемента $x \in X$. Тоді $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$, а отже, за неперервністю метрики $\widetilde{\rho}$ отримаємо $\widetilde{\rho}(x_n, x) \to 0$, $x_n \to \infty$. Навпаки, нехай $\widetilde{\rho}(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. Розглянемо два випадки. Припустимо, що $d'(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. Тоді $\psi(d(x_n, x)) \to 0$, а отже, $d(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. У випадку, коли $\rho'(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ бачимо, що звідси випливає умова $d'(x_n, x) \to 0$. Отже, $d(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, метрика $\widetilde{\rho}$ індукує вихідну топологію простору X. $\square$

5.5. Висновки

У даному розділі розглянуто задачі продовження ультраметрик, псевдометрик та сімей узгоджених ультраметрик, визначених на підмножинах нульвимірних просторів. У підрозділі 5.1 побудовано неперервний у топології поточкової збіжності однорідний оператор продовження неперервних ультраметрик, визначених на фіксованій замкненій підмножині нульвимірного сепарабельного некомпатного метризовного топологічного простору. Оператор продовження побудовано за допомогою модифікації конструкції Т. О. Банаха та Ч. Бессаги [10] лінійного продовження (псевдо)метрик. Основна теорема підрозділу 5.2 стверджує, що існує оператор одночасного продовження сімей неперервних ультраметрик, заданих на ланцюгах замкнених підмножин нульвимірного простору. Цей оператор є аналогом оператора, побудованого Богатим [68] для випадку ланцюгів, що складаються з двох ланок. У підрозділі 5.3 встановлено деякі властивості оператора продовження неперервних псевдометрик, побудованого з використанням теореми Майкла про селекції для багатозначних відображень у нульвимірному випадку. У підрозділі 5.4 доведено існування оператора продовження деякого підкласу класу грубо рівномірних метрик, визначених на фіксованій замкненій підмножині власного метричного простору.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові та вивченню властивостей операторів продовження метричних структур.

У розділі 3 розглянуто лінійні оператори продовження часткових (псевдо)метрик, визначених на замкнених опуклих підмножинах локально опуклих топологічних просторів. Основним результатом підрозділу 3.1 є теорема про існування лінійного неперервного оператора одночасного продовження напівнеперервних зверху псевдометрик, заданих на опуклих замкнених підмножинах компактного локально опуклого простору. При цьому на множині часткових псевдометрик введено топологію Фелла (при ототожненні кожної псевдометрики з її субграфіком). Існування оператора, що зберігає метрики і володіє тими ж властивостями, доведене для випадку фіксованої опуклої підмножини основного простору.

У підрозділі 3.4 розглянута задача одночасного продовження ліпшицевих псевдомерик, визначених на опуклих замкнених множинах в локально опуклому компактному метризовному просторі. Зауважено, що оператор продовження псевдометрик, побудований за допомогою метричної проекції, є лінійним та неперервним у топологіях рівномірної, поточкової збіжності, а також у ліпшицевій топології.

У [62] Е. Д. Тимчатин та М. М. Зарічний довели, що існує лінійний неперервний оператор одночасного продовження неперервних псевдометрик, визначених на замкнених підмножинах компактного метризовного топологічного простору. При цьому множина часткових псевдометрик розглядалася у топології В'єторіса, а оператор продовження побудований з використанням теореми Фришковського [26] про існування неперервних селекцій для багатозначних відображень. У підрозділі 3.5 дисертації розглянуто задачу продовження неперервних псевдометрик, визначених на опуклих тілах в евклідовому просторі. Побудовано лінійний неперервний у топології Фелла оператор продовження псевдометрик, який в деякій мірі є аналогом оператора, отриманого в [62]. Оператор продовження побудований за допомогою теореми Брессана та Коломбо [15] про існування неперервної селекції для багатозначних відображень у випадку некомпактного топологічного простору.

Розділ 4 дисертаційної роботи присвячений побудові та опису властивостей однорідних операторів одночасного продовження неперервних ультраметрик та рівномірно незв'язних метрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного топологічного простору. Основні результати розділу є подальшим розвитком результатів М. М. Зарічного та Е. Д. Тимчатина [63]. Оскільки сума двох метрик, взагалі кажучи, не є ультраметрикою, то не можна говорити про лінійні оператори продовження ультраметрик. Натомість операція взяття поточкового максимуму двох ультраметрик не виводить за межі класу ультраметрик. Основна теорема з [63] стверджує, що існує оператор одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного топологічного простору. Цей оператор зберігає максимум двох ультраметрик зі спільною областю визначення, вимір Асуада ультраметричного простору, а також є неперервним у топології В'єторіса (при ототожненні кожної ультраметрики з її графіком). Проте цей оператор, взагалі кажучи, не є однорідним. Мета підрозділу 4.1 — побудова однорідного оператора продовження ультраметрик в умовах задачі, розглянутої в [63]. В основній теоремі даного підрозділу доведено існування однорідного оператора, який має такі ж властивості, що й оператор з [63] за винятком властивості збереження виміру Асуада та неперервності у топології поточкової збіжності звуження оператора на множину ультраметрик з довільною фіксованою областю визначення. Основний результат розділу 4 наведений у підрозділі 4.2. За допомогою модифікації конструкції М. М. Зарічного та Е. Д. Тимчатина доведено, що існує однорідний оператор одночасного продовження неперервних ультраметрик, визначених на замкнених підмножинах нульвимірного компактного метризовного простору, який володіє всіма властивостями оператора, побудованого в [63]. У підрозділі 4.3 доведено, що цей оператор також може бути використаний для розв'язання аналогічної задачі продовження рівномірно незв'язних неперервних метрик.

Побудова та подальше дослідження властивостей операторів продовження ультраметрик та псевдометрик, заданих на підмножинах нульвимірних метризовних просторів та власних метричних просторів, проведені у розділі 5. Основним результатом підрозділу 5.1 є теорема, яка стверджує, що існує однорідний оператор, який продовжує неперервні ультраметрики, визначені на фіксованій замкненій підмножині нульвимірного некомпактного сепарабельного метризовного топологічного простору. Крім цього, цей оператор зберігає максимум двох ультраметрик, а також є неперервним у топології поточкової збіжності. При побудові даного оператора використано аналог конструкції лінійного оператора продовження, запропонованої Т. О. Банахом та Ч. Бессагою для випадку часткових метрик (див. [10]).

Підрозділ 5.2 присвячено задачі продовження сімей узгоджених неперервних ультраметрик, визначених на ланцюгах замкнених підмножин нульвимірного метризовного топологічного простору. Метою даного підрозділу є доведення існування оператора, який одночасно продовжує сім'ю узгоджених ультраметрик до ультраметрики, яка визначена на об'єднанні областей визначення ультраметрик даної сім'ї. Зауважимо, що подібний результат отриманий для метрик де Гроотом [18]. Для конструкції оператора продовження використано результат Богатого [68], отриманий для випадку сім'ї, що складається з двох ультраметрик.

Основним результатом підрозділу 5.4 є теорема про існування оператора продовження деякого підкласу класу грубо рівномірних метрик, визначених на фіксованій замкненій підмножині власного метричного простору. Цей результат є узагальненням теореми М. М. Зарічного [69] про продовження асимптотично ліпшицевих метрик, заданих на замкненій підмножині власного метричного простору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Alo R.* Results related to P-embedding // Topics in Topology. – Amsterdam-London. – 1974. – P.29–40.

[2] *Alo R., Shapiro H. L.* Extensions of totally bounded pseudometrics // Proc. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol.19. – P.877–884.

[3] *Alo R., Imler L., Shapiro H. L.* P-and z-embedded subspaces // Math. Ann. – 1970. – Vol.188. – P.13–22.

[4] *Arens R.* Extension of coverings, of pseudometrics, and of linear-space-valued mappings // Canadian J. Math. – 1953. – Vol.5. – P.211–215.

[5] *Assouad P.* Sur la distance de Nagata // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1982. – Vol.294, № 1. – P.31–34.

[6] *Assouad P.* Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ // Bull. Soc. Math. France. – 1983. – Vol.111. – P.429–448.

[7] *Bacon P.* Extending a complete metric // Amer. Math. Monthly. – 1968. – Vol.75. – P.642–643.

[8] *Banakh T.* AE(0)–spaces and regular operators extending (averaging) pseudometrics // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1994. – Vol.42, № 3.– P.197–206.

[9] *Banakh T., Pikhurko O.* On linear functorial operators extending pseudometrics // Comment. Math. Univ. Carolin. – 1997. – Vol.38, № 2. – P.343–348.

[10] *Banakh T., Bessaga C.* On linear operators extending [pseudo]metrics // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 2000. – Vol.48, № 1. – P.35–49.

[11] *Beer G.* Topologies on closed and closed convex sets. – Kluwer Academic Publishers, 1993.

[12] *Bessaga C.* On linear operators and functors extending pseudometrics // Fund. Math. – 1993. – Vol.142, № 2. – P.101–122.

[13] *Bing R. H.* Extending a metric // Duke Math. J. – 1947. – Vol.14. – P.511–519.

[14] *Borsuk K.* Theory of Retracts. – Warszawa: PWN, 1967.

[15] *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. – 1988. – Vol.90. – P.69–86.

[16] *David G., Semmes S.* Fractured fractals and broken dreams: Self-similar geometry through metric and measure // Oxford Lecture Ser. Math. Appl. – Vol.7. – Oxford University Press. – 1997.

[17] *De Groot J.* Non-archimedean metrics in topology // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol.7. – P.948–953.

[18] *De Groot J.* Some special metrics in general topology // Colloq. Math. – 1958. – Vol.6. – P.283–286.

[19] *Dowker C. H.* On a theorem of Hanner // Ark. Math. – 1952. – Vol.2. – P.307–313.

[20] *Dugundji J.* An extension of Tietze's theorem // Pacific J. Math. – 1951. – Vol.1. – P.353–367.

[21] *Ellis R. L.* Extending uniformly continuous pseudo-ultrametrics and uniform retracts // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol.30. – P.599–602.

[22] *Engelking R.* Dimension theory. – Math. Library, North Holland, 1978.

[23] *Fedorchuk V. V.* Triples of infinite iterations of metrizable functors // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1990. – Vol.54, №2. – P.396–417: translation in Math. USSR-Izv. – 1991. – Vol.36, №2. – P.411–433.

[24] *Filippov V. V.* Topological structure of solution spaces of ordinary differential equations, in Russian // Uspekhi Mat. Nauk. – 1993. – Vol.48. – P.103–54.

[25] *Flachsmeyer J.* Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Teilmengen // Math. Nachr. – 1964. – B.26. – S.321–337.

[26] *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of non-convex multi-valued maps // Studia Math. – 1983. – Vol.76. – P.163–174.

[27] *Gantner T.* Extensions of uniform structures // Fund. Math. – 1969/1970. – Vol.66. – P.263–281.

[28] *Hartman S., Mycielski J.* On the embeddings of topological groups into connected topological groups // Colloq. Math. – 1958. – Vol.5. – P.167–169.

[29] *Hattori Y.* Special metrics // Proc. Ninth Prague Topological Symposium. – 2001. – P.165—174.

[30] *Hausdorff F.* Erweiterung einer Homöomorphie // Fund. Math. – 1930. – B.16. – S.353–360.

[31] *Holá L., McCoy R. A.* The Fell topology on $C(X)$ // Annals New York Academy of Science. – 1992. – Vol.659. – P.99–110.

[32] *Klee V. L.* Some topological properties of convex sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol.78. – P.30–45.

[33] *Künzi H.-P., Shapiro L. B.* On simultaneous extension of continuous partial functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – Vol.125, №6. – P.1853–1859.

[34] *Kuratowski K.* Sur l'espace des fonctions partielles // Ann. Mat. Pura Appl. – 1955. – Vol.40. – P.61–67.

[35] *Kuratowski K.* Sur une méthode de métrisation compète de certains espaces d'ensembles compacts // Fund. Math. – 1956. – Vol.43. – P.114–138.

[36] *Kuratowski K.* Topology. – New York: Acad. Press, 1966. – Vol.1.

[37] *Luukkainen J.* Extension of spaces, maps, and metrics in Lipschitz topology // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes. – 1978. – No.17, 62P.

[38] *Luukkainen J.* Extension of locally uniformly equivalent metrics // Colloq. Math. – 1982. – Vol.46, № 2. – P.205–207.

[39] *Luukkainen J.* Assouad dimension: antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures // J. Korean Math. Soc. – 1998. – Vol. 35, № 1. – P.23–76.

[40] *McClendon J. F.* Metric families // Pacific J. Math. – 1975. – Vol.57, № 2. – P.491–509.

[41] *McClendon J. F.* Embedding metric families // Pacific J. Math. – 1976, – Vol.63, № 2. – P.481–489.

[42] *Michael E.* Selected selection theorems // Amer. Math. Monthly. – 1956. – Vol.63. – P.233–238.

[43] *Movahedi-Lankarani H.* An invariant of bi-Lipschitz maps // Fund. Math. – 1993. – Vol.143, № 1. – P.1–9.

[44] *Nadler S. B.* Hyperspaces of sets. – New York and Basel: Marsel Dekker, 1978.

[45] *Nguyen To Nhu* Extending metrics uniformly // Colloq. Math. – 1980. – Vol.43, № 1. – P.91–97.

[46] *Nguyen Van Khue, Nguyen To Nhu* Two extensors of metrics // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. – 1981. – Vol.29, № 5–6. – P.285–291.

[47] *Pelczynski A.* Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions // Dissertationes Math. – 1968. – Vol.58.

[48] *Pikhurko O.* Extending metrics in compact pairs // Mat. Stud. – 1994. – Vol.3. – P.103–106.

[49] *Radul T.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1998. – Vol.39, № 3. – P.609–615.

[50] *Rokafellar R. T.*, Integrals which are convex functionals // Pacif. J. Math. – 1968. – V.24. – P.525–539.

[51] *Shapiro H. L.* Extensions of pseudometrics // Canad. J. Math. – 1966. – Vol.18. – P.981–998.

[52] *Shapiro H. L.* More on extending continuous pseudometrics // Canad. J. Math. – 1970. – Vol.22. – P.984–993.

[53] *Sennott L. I.* Extending complete, continuous pseudometrics // Colloq. Math. – 1979. – Vol.41, № 2. – P.237–241.

[54] *Stasyuk I. Z.* On a homogeneous operator extending partial ultrametrics // Mat. Stud. – 2004. – Vol.22, №1. – P.73–78.

[55] *Stasyuk I. Z.* On operators extending uniformly disconnected merics // Mat. Stud. – 2006. – Vol.26, №1. – P.101–104.

[56] *Stasyuk I.* Extending partial ultrametrics // Конференція молодих учених із сучасних проблем математики та механіки. – Львів, 2004. – Тези доповідей. – С. 186–188.

[57] *Stasyuk I.* Extending pseudometrics defined on closed convex subsets of $\mathbb{R}^n$ // International Conference "Geometric Topology, Infinite-Dimensional Topology, Absolute Extensors, Applications". – Lviv, 2004. – Book of Abstracts. – P.75–76.

[58] *Stasyuk I.* Extending partial pseudometrics in the Euclidean space // Конференція молодих учених із сучасних проблем математики та механіки, Львів, травень 2005. – Тези доповідей. – С. 252.

[59] *Stasyuk I.* Simultaneous extesion of partial ultrametrics, // Міжнародна конференція "Аналіз та суміжні питання". – Львів, 2005. – Тези доповідей. – С. 102.

[60] *Tkačenko M. G.* On group uniformities on square of a space and extending pseudometrics. II // Bull. Austral. Math. Soc. – 1995. – Vol.52, № 1. – P.41–61.

[61] *Toruńczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fund. Math. – 1972. Vol.77, № 2. – P.191–193.

[62] *Tymchatyn E. D., Zarichnyi M.* On simultaneous linear extensions of partial (pseudo)metrics // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol.132. – P.2799–2807.

[63] *Tymchatyn E. D., Zarichnyi M.* A note on operators extending partial ultrametrics // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2005. Vol.46, №3. – P.515–524.

[64] *Van Breugel F., Watson S.* A note on hyperspaces and terminal coalgebras // Coalgebraic Methods in Computer Science. – Amsterdam, 1999. – 8pp., Electron. Notes Theor. Comput. Sci. – 19: Elsevier. – Amsterdam. – 1999.

[65] *Waśko A.* Extensions of functions defined on product spaces // Fund. Math. – 1984. – Vol.124, № 1. – P.27–39.

[66] *Wijsman R.* Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol.123. – P.32–45.

[67] *Zarichnyi M.* Regular linear operators extending metrics: a short proof // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 1996. – Vol.44, № 3. – P.267–269.

[68] *Богатый С. А.* Метрически однородные пространства // Успехи мат. наук – 2002. вып. 2(344). – Т.57. – С.2–22.

[69] *Зарічний М.* Продовження метрик в асимптотичній топології // подано у Матем. вісник НТШ, 2005.

[70] *Стасюк І. З.* Продовження напівнеперервних псевдометрик // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2004. – Т.2. – С.88–95.

[71] *Стасюк І. З.* Оператори продовження часткових ультраметрик, неперервні в топології поточкової збіжності // Вісник ЛНУ, Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С.273–279.

[72] *Стасюк І. З.* Оператори одночасного продовження часткових ультраметрик // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т.49. – № 2. – С.27–32.

[73] *Стасюк І. З.* Оператори одночасного продовження псевдометрик, заданих на опуклих тілах в евклідовому просторі // Наук. Вісник Черн. Унів.: Зб. наук. праць, Вип. 314-315, Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 173–180.

[74] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986.